

VAGNER GONÇALVES FERREIRA

**SOLUÇÃO DO TIPO BROVAR PARA O SEGUNDO PROBLEMA DE VALOR DE
CONTORNO DA GEODÉSIA COM VISTAS À MODERNIZAÇÃO DE SISTEMAS DE
ALTITUDES**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná, como parte das exigências para a obtenção do título de Doutor em Ciências Geodésicas.

Orientador: Prof. Dr. Silvio R. C. de Freitas

Coorientador: Prof. Dr. Bernhard Heck

**CURITIBA
2011**

F383 Ferreira, Vagner Gonçalves
Solução do tipo Brovar para o segundo problema de valor de contorno da geodésia com vistas à modernização de sistemas de altitudes / Vagner Gonçalves Ferreira. – Curitiba, 2011.
171 f.: il., tabs, grafs.

Orientador: Prof ^o. Dr. Silvio R. C. de Freitas
Co-orientador: Prof ^o. Dr. Bernhard Heck
Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências da Terra, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas.
Inclui Bibliografia.

1. Altitudes – Levantamento. 2. Sistema de posicionamento global. 3. Geodésia. 4. Geóide. I. Freitas, Sílvio Rogério Correia de. II. Heck, Bernhard. III. Título. IV. Universidade Federal do Paraná.

CDD 526.36

TERMO DE APROVAÇÃO

VAGNER GONÇALVES FERREIRA

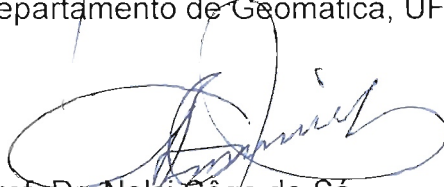
“SOLUÇÃO DO TIPO BROVAR PARA O SEGUNDO PROBLEMA DE VALOR DE
CONTORNO DA GEODÉSIA COM VISTAS À MODERNIZAÇÃO DE SISTEMAS DE
ALTITUDES ”

Tese nº 74 aprovada como requisito parcial do grau de Doutor no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Setor de Ciências da Terra da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:



Prof. Dr. Sílvio Rogério Correia de Freitas
Departamento de Geomática, UFPR



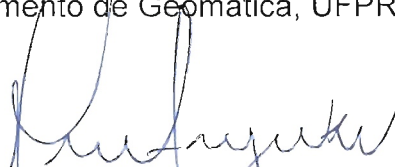
Prof. Dr. Nelsi Côgo de Sá
Universidade de São Paulo, USP



Profª. Drª. Regiane Dalazoana
Departamento de Geomática, UFPR



Prof. Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira
Departamento de Geomática, UFPR



Prof. Dr. Luís Augusto Koenig Veiga
Departamento de Geomática, UFPR

Curitiba, 10 de fevereiro de 2011.

DEDICATÓRIA

À minha esposa e minha filha

AGRADECIMENTOS

Ao amigo e orientador Professor Dr. Silvio Rogério Correia de Freitas, pela orientação segura e permanente incentivo na realização deste trabalho, pelos ensinamentos, conselhos e tempo a mim dispensado, minha eterna gratidão.

To my co-advisor Dr. Prof. Bernard Heck for teaching me some new knowledge and help me during my Ph.D course.

To the GIK secretary Mrs Diana Bracko for all support.

To GIK colleagues for nice relationship: Michael (Mayer and Lösler), Luo, Andreas (Knöpfler and Schenk), Rodrigo, Hermann, Awange, Seitz and Lindner.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pelo auxílio financeiro relativo aos meus primeiros sete meses como aluno de doutorado.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo fomento e apoio financeiro ao desenvolvimento deste trabalho durante dois anos (Processo 143509/2008-0, Edital MCT/CNPq nº 27/2007).

Ao Projeto PROBRAL (CAPES/DAAD, Deutscher Akademischer Austauschdienst) n. 228/06 PROCESSO BEX4157/08-7.

Aos Professores Denizar Blitzkow e Nelsi Cogo de Sá pela cessão dos dados empregados na seção 5.6.

Aos desenvolvedores do GMT (*Generic Mapping Tools*) por disponibilizar está ferramenta para análise e produção das figuras desta tese para uma melhor compreensão dos resultados no domínio do espaço.

Aos desenvolvedores do sistema $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ambiente em que esta tese foi editada, bem como da classe $\text{ABN}^{\text{T}}\text{E}_{\text{X}}$.

A realização deste trabalho não poderia ser alcançada sem a colaboração de todos.

EPÍGRAFE

Não importa o quanto você sabe sobre um tópico, há sempre alguém que sabe mais, incluindo você mesmo uma semana depois.

Anônimo

RESUMO

Construída sobre os princípios básicos da teoria do potencial, uma definição adequada do Problema de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG) é apresentada, incluindo as suas possíveis aproximações no domínio das aplicações conduzindo a soluções práticas. No entanto, dentre os PVCGs existentes investigou-se nesta tese o PVCG fixado, que é compatível com as tecnologias emergentes do GNSS (*Global Navigation Satellite System*) que faz com que a superfície de contorno seja conhecida, *i.e.*, a superfície terrestre. A solução empregada baseia-se no método de Brovar originalmente aplicada ao problema de Molodenskii para solucionar o PVCG escalar livre, e permite uma representação em termos de solução do problema da derivada normal somando-se adequados termos de correção. A solução apresentada nesta tese é compatível com as atuais técnicas de suavização do campo de gravidade externo quando da solução empregando-se: a técnica remover-restaurar; redução para as massas topo-isostáticas; modelagem residual de terreno; uso de funcionais dos Modelos Globais do Geopotencial de alta resolução; integração sobre uma calota esférica modificando-se o núcleo de Hotine. Toda a discussão se dá no contexto da modernização do sistema de altitudes brasileiro. Um sistema de altitudes moderno permite a determinação de altitudes em relação ao *datum* vertical em todos os lugares de um país empregando-se a tecnologia GNSS. Apresenta-se ainda um método simples e prático para a transformação direta dos desníveis ortométricos-normal, atualmente empregados no Brasil, em desníveis normais. Estes últimos podem ser empregados no ajustamento, pois os mesmos atendem ao conceito de um sistema de altitudes holonômico. No contexto da solução do PVCG fixado empregando-se a superfície terrestre como superfície de contorno e da conversão de altitudes ortométricas-normal em normais, a superfície de referência vertical que naturalmente surge é o quase geoide. Muito embora não esteja vinculada a uma superfície equipotencial do campo de gravidade, a altitude normal atende todas as exigências assim como a ortométrica, a exceção, válida para as duas, é quando se deseja que pontos estejam em nível, neste caso aplica-se a altitude dinâmica. Do ponto de vista teórico, esta última é a que mais se presta para trabalhos de Engenharia. Dois estudos de caso realizados, um no Estado Federal de Bade-Vurtemberg, Alemanha e outro no Estado do Paraná, Brasil mostraram que o problema na determinação do campo de gravidade no Brasil é o erro de omissão nos dados gravimétricos. A análise da precisão mostra uma insuficiente discretização do campo de gravidade usado na determinação do quase geoide para o Estado do Paraná. Assumindo que o erro de comissão seja de natureza aleatória nos valores de gravidade, um erro absoluto esperado no modelo do quase geoide devido ao erro de omissão é da ordem do decímetro. Porém avaliado relativamente este erro é de $\pm 1,3$ ppm para distâncias superiores a resolução do modelo, neste caso 4,6 km. Como contribuição, determinou-se ainda a correção elipsoidal para os valores de contorno da ordem de $\mathcal{O}(e^4)$.

Palavras-chave: Geoide; Quase geoide; Distúrbio do potencial; Correção elipsoidal; Continuação analítica.

ABSTRACT

Built on the basic principles of potential theory, a proper definition of the Geodetic Boundary Value Problem (GBVP) is presented, including the possibilities for practical applications. However, among the existing GBVPs investigated, in this thesis the fixed GBVP, which is compatible with the technologies emerging from Global Navigation Satellite System (GNSS) was investigated. The solution employed is based on the Brovar's type, originally applied to solving the Molodenskii's boundary value problem, and allows a representation in terms of solving the problem of the oblique derivative by adding suitable correction terms. The solution presented in this thesis is compatible with current techniques for smoothing the external gravity field when employing the solution: remove-restore technique, the topographic-isostatic masses reduction; residual terrain modeling, the high resolution global geopotential models; integration over a spherical cap by modifying the Hotine's kernel. All discussion is in the context of the modernization of Brazilian heights system. A modern height system allows the determination of heights in relation to the vertical datum everywhere in a country employing the GNSS technology. Also supplied is a simple and practical method for direct transformation of normal-orthometric heights, currently employed in Brazil, in normal a height which is a holonomic height system. Two studies cases, one in the Federal State of Baden-Wurtemberg, Germany and another one in Parana State, Brazil showed that the problem in determining the gravity field in Brazil is the omission error in gravity data. Accuracy analysis shows an insufficient discretization of the gravity field used in determining the quasi-geoid to the State of Parana. Assuming that the commission error in the gravity values is random; an absolute error expected in the quasigeoid model due to omission error is the order of decimeter. But, for the relative sense, the evaluation of this error is ± 1.3 ppm for distances beyond the resolution of the model, i.e. 4.6 km. As a contribution, it was determined the ellipsoidal correction to the boundary value of the order $\mathcal{O}(e^4)$.

Key-words: Geoid; Quasigeoid; Disturbing potential; Ellipsoidal corrections; Analytic continuation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Fluxograma de cálculo de números geopotenciais em uma abordagem moderna	24
Figura 2	Duas linhas diferentes de nivelamento conectando A e B	28
Figura 3	Altitude ortométrica	31
Figura 4	Altitude normal H^N e anomalia de altitude ζ	33
Figura 5	Altitude ortométrica-normal	35
Figura 6	Altitude elipsoidal	37
Figura 7	A distância angular e espacial entre dois pontos sobre a esfera	41
Figura 8	Gradiente vertical ar-livre da gravidade para o estado do Paraná	43
Figura 9	Coordenadas retangulares e esféricas	45
Figura 10	Geometria para o caso especial da terceira identidade de Green	47
Figura 11	Um exemplo para uma superfície em estrela	57
Figura 12	Superfície terrestre S_E e superfície de nível S_P	57
Figura 13	Continuação analítica a partir da superfície terrestre para a superfície esferopotencial	59
Figura 14	Região de influência A sobre o ponto P	63

Figura 15	Intervalos de comprimentos de onda e as técnicas relativas de aproximação	64
Figura 16	Perfil de anomalias de gravidade com a técnica da decomposição	66
Figura 17	Superfície de referência para o cálculo do efeito residual do terreno	68
Figura 18	Efeito indireto sobre o teluroide	70
Figura 19	Topografia residual centrada no ponto 9°E e 48°N com base no SRTM e o DTM2006.0 desenvolvido até o grau 360	71
Figura 20	Efeito indireto sobre o geoide	72
Figura 21	Comportamento do núcleo da integral de Stokes	74
Figura 22	Coordenadas polares para a esfera unitária e domínio de integração, toda a esfera é simbolizada como Ω_{\odot} e a calota esférica por Ω_k	75
Figura 23	Comportamento do coeficiente de integração de acordo com a integral (176)	76
Figura 24	Modificações de acordo com Wong e Gore para a função núcleo original (a), modificada até $L = 30$ (b) e $L = 360$ (c)	78
Figura 25	Modificação de Meissl para o núcleo de Stokes empregando-se 1° e 3° .	79
Figura 26	Modificação do núcleo de Stokes conforme Heck e Grüniger	80
Figura 27	Rede Altimétrica Fundamental Brasileira	82
Figura 28	Redes altimétricas com origens em Imbituba e Santana	83
Figura 29	Efeitos do não paralelismo das superfícies equipotenciais sobre as linhas	

de nivelamento	84
Figura 30 Levantamentos gravimétricos sobre a RAFB	91
Figura 31 Da separação entre o quase geoide e o geoide para o Brasil	96
Figura 32 A geometria para a solução de Molodenskii e Brovar	102
Figura 33 Comportamento dos núcleos das integrais de Hotine $H(\psi)$ e $H^*(\psi)$	111
Figura 34 Modificação de Wong e Gore aplicada à função núcleo de Hotine	113
Figura 35 Comportamento do coeficiente de integração de acordo com a integral (296)	114
Figura 36 Coordenadas harmônicas elipsoidais	117
Figura 37 Localização da área de estudos na Alemanha, estado federal de Bade- Vurtemberg	125
Figura 38 Topografia para a região de estudos (SRTM)	127
Figura 39 Efeito indireto sobre o quase geoide ζ_{RTM}	128
Figura 40 Efeito gravimétrico para a redução RTM	129
Figura 41 Distribuição de dados gravimétricos para a região de estudos	133
Figura 42 Processo de interpolação dos distúrbios de gravidade residuais	135
Figura 43 Distribuição dos distúrbios de gravidade residuais δg_{res}	136
Figura 44 Função covariância amostral e analítica para os distúrbios de gravidade residuais	137

Figura 45	Comportamento do termo de correção de primeira ordem para as séries de Brovar no contexto do segundo PVCG	139
Figura 46	Quase geoide para o estado federal de Bade-Vurtemberg com 30 segundos de arco de resolução	141
Figura 47	Topografia para o estado federal de Bade-Vurtemberg indicando duas subáreas com os relevos relativamente suave e acidentado	142
Figura 48	Erro médio quadrático das diferenças (emq), $\zeta_{verdadeiro} - \zeta_{estimado}$	143
Figura 49	Localização da área de estudos no Brasil, estado do Paraná	144
Figura 50	Topografia para a região de estudos (SRTM)	145
Figura 51	Efeito gravimétrico para a redução RTM	146
Figura 52	Efeito indireto sobre o quase geoide ζ_{RTM}	147
Figura 53	Valores de intensidade de gravidade para a região do estado do Paraná e adjacências	148
Figura 54	Função covariância amostral para os distúrbios de gravidade residuais ..	149
Figura 55	Quase geoide para a região do estado do Paraná com base no PVCG fixado	150
Figura 56	Potência espectral do MGG advindo do GOCE e do quase geoide local ..	151
Figura 57	Avaliação do quase geoide para a região do estado do Paraná com base no PVCG fixado	153
Figura 58	Avaliação relativa do quase geoide para a região do estado do Paraná empregando-se a derivada direcional com $\alpha = 45^\circ$	155

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Comportamento estatístico dos termos corretivos para a anomalia de altitude para $n = 2$	138
Tabela 2	Estatísticas das diferenças, $\zeta_{\text{verdadeiro}} - \zeta_{\text{estimado}}$, devido a resolução limitada dos dados de gravidade	143
Tabela 3	Avaliação absoluta do quase geoide para o estado do Paraná	151
Tabela 4	Erros padrões aproximados para as altitudes elipsoidais, ortométricas-normal e “alturas geoidais-normal”	152
Tabela 5	Avaliação relativa do quase geoide para o estado do Paraná	154

LISTA DE SIGLAS

GNSS	<i>Global Navigation Satellite System</i>
GPS	<i>Global Positioning System</i>
<i>i.e.</i>	<i>id est</i> « isto é »
PVCG	Problema de Valor de Contorno da Geodésia
<i>cf.</i>	<i>confer</i> « confronte, confira, confirme »
<i>e.g.</i>	<i>exempli gratia</i> « por exemplo »
MEC	Método dos Elementos de Contorno
BEM	<i>Boundary Element Method</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
FEM	<i>Finite Element Method</i>
MGG	Modelo Global do Geopotencial
SGA	Sistema Global de Altitudes
RAFB	Rede Altimétrica Fundamental do Brasil
SIRGAS	Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas
EGM2008	<i>Earth Gravity Model 2008</i>
RNs	Referências de Nível, plural de referências de nível
SGB	Sistema Geodésico Brasileiro
PREM	<i>The Preliminary Reference Earth Model</i>
MDT	Modelo Digital de Terreno
RTM	<i>Residual Terrain Modeling</i>
UNB	<i>University of New Brunswick</i>
KTH	<i>Royal Institute of Technology</i>
SRTM	<i>Shuttle Radar Topography Mission</i>
DTM	<i>Digital Terrain Model</i>
CNG	Conselho Nacional de Geografia
IBGE	Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
SGE	Serviço Geográfico do Exército
IGG	Instituto Geográfico e Geológico de São Paulo
<i>CN</i>	Correção Normal
TNMM	Topografia do Nível Médio do Mar
SSTop	<i>Sea Surface Topography</i>
WGS84	<i>World Geodetic System 1984</i>
GRS80	<i>Geodetic Reference System 1980</i>
IAG	<i>International Association of Geodesy</i>

<i>ad hoc</i>	Do latim: «para isto» «para esta finalidade»
DVB	<i>Datum</i> Vertical Brasileiro
<i>a priori</i>	Do latim, « partindo daquilo que vem antes »
SGR	Sistema Geodésico de Referência
FFT-1D	<i>One-Dimensional Fast Fourier Transform</i>
GOCE	<i>Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer</i>
ppm	partes por milhão

LISTA DE SÍMBOLOS

h	Altitude elipsoidal
H^O	Altitude ortométrica
N	Altura geoidal
H^N	Altitude normal
ζ	Anomalia de altitude
C	Número geopotencial
W_0	Valor do geopotencial para o geoide
W_P	Valor do geopotencial de uma equipotencial passante pelo ponto P
P	Um ponto qualquer sobre a superfície terrestre
U_P	Valor do esferopotencial passante pelo ponto P
T_P	Distúrbio do potencial para um ponto P
G_n	Termos da Série de Molodenskii
χ_n	Função auxiliar que representa a densidade para uma camada de superfície segundo a Solução de Molodenskii
μ_n	Função auxiliar que representa a densidade para uma camada de superfície segundo a Solução de Brovar
dn	Elemento infinitesimal de nivelamento
Γ	Caminho em laço de um nivelamento
dz	Separação entre duas superfícies geopotenciais infinitamente próximas
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto escalar de vetores
H^D	Atitude dinâmica
CD	Correção dinâmica
ΔH	Incremento de desnível de uma altitude H
CA	Correção de altitude H
dCA	Elemento infinitesimal de correção de altitude
CH_{AB}	Termo que transforma o desnível dinâmico em um desnível normal ou ortométrico
\bar{g}	Valor médio da gravidade ao longo da linha de força
Σ	Superfície do teluroide
Φ	Latitude astronômica
Λ	Longitude astronômica
H^{ON}	Altitude ortométrica-normal
C'	Número esferopotencial
CON_{AB}	Correção ortométrica-normal

f^*	“Achatamento de gravidade” normal
γ_a	Gravidade normal para o equador
γ_b	Gravidade normal para o polo
α	Azimute
δs	Distância horizontal
η	“Altura geoidal-normal”
Δg_B	Anomalia de gravidade Bouguer
J	Curvatura média das superfícies equipotenciais do campo de gravidade terrestre
ω	Velocidade angular de rotação
ρ	A densidade das massas topográficas
ℓ_0	Distância Euclidiana
ψ	Distância angular
Δ	Operador de Laplace ou Laplaciano
\vec{g}_P	Vetor gravidade para um ponto P
$\vec{\gamma}$	Vetor gravidade normal
Q	Na maioria dos casos um ponto qualquer sobre o teluroide
$\Delta \vec{g}$	Vetor anomalia de gravidade
Δg_P	Anomalia de gravidade para um ponto P
$\delta \vec{g}_P$	Vetor distúrbio de gravidade para um ponto P
δg_P	Distúrbio de gravidade para um ponto P
β	Ângulo de inclinação máxima do terreno
ξ	Componente meridiana do desvio da vertical
η	Componente primeiro vertical do desvio da vertical
$S(\psi)$	Função esférica de Stokes
ct	Correção de terreno
$H(\psi)$	Núcleo esférico de Hotine
$\aleph(O)$	Conjunto de todas as superfícies em estrela
D	Operador continuação descendente
U	operador continuação ascendente
$n_{máx}$	Grau máximo da expansão em harmônicos esféricos
λ	Comprimento de onda, longitude e ainda função definida sobre S como uma densidade de superfície generalizada.
C_{lm}^{topo}	Coeficientes dos hamônicos esférico para a topografia
S_{lm}^{topo}	Coeficientes dos hamônicos esférico para a topografia
Ω_k	Domínio da calota esférica de raio ψ_k
Ω_{\odot}	Domínio da esfera unitária
δU	Diferença de potencial entre a superfície de referência para as altitudes ortométricas-

normal e o esferopotencial coincidente com o ponto em que o quase geoide intercepta a normal

$\vec{\tau}$ Vetor unitário na direção e sentido do vetor gravidade normal

e^2 Quadrado da primeira excentricidade

e'^2 Quadrado da segunda excentricidade

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	20
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	20
1.2 OBJETIVOS DA INVESTIGAÇÃO	25
1.2.1 Objetivo geral	25
1.2.2 Objetivos específicos	25
1.3 CONTRIBUIÇÃO DO AUTOR	25
1.4 ESTRUTURA DA TESE	26
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	27
2.1 SISTEMAS DE ALTITUDES	27
2.1.1 Número geopotencial e altitude dinâmica	27
2.1.2 Altitude ortométrica	31
2.1.3 Altitude normal	32
2.1.4 Altitude ortométrica-normal	34
2.1.5 Altitude elipsoidal	36
2.1.6 A separação entre o quase geoide e o geoide	38
2.2 PROBLEMAS DE VALORES DE CONTORNO	44
2.2.1 Da Teoria do Potencial	44
2.2.2 Da Geodésia Física	45
2.2.2.1 Identidades de Green	46
2.2.2.2 Existência e unicidade	48
2.2.2.3 Aplicação da identidade de Green	49
2.2.3 Soluções clássicas para o PVCG	50
2.2.3.1 O campo de gravidade anômalo	50
2.2.3.2 A integral de Stokes	51
2.2.3.3 A integral de Molodenskii	51
2.2.3.4 A integral de Hotine	53
2.3 CONTINUAÇÃO ANALÍTICA	54
2.3.1 O Teorema de Runge	55
2.3.2 Continuação para uma particular superfície de nível	58
2.3.3 Determinação do operador L_n	60

2.3.4	A solução de Molodenskii e o GPS	61
2.4	PRINCÍPIO DA TÉCNICA DA DECOMPOSIÇÃO ESPECTRAL	62
2.4.1	O método RTM	67
2.4.2	Condensação de Helmert	72
2.5	MODIFICAÇÃO PARA O NÚCLEO DA INTEGRAL DE STOKES	73
3	PROBLEMAS EM ABERTO - CASO BRASILEIRO	81
3.1	A REDE ALTIMÉTRICA FUNDAMENTAL BRASILEIRA.....	81
3.2	RELAÇÃO ENTRE A ALTITUDE NORMAL E A ORTOMÉTRICA-NORMAL.....	87
3.3	POR QUE MODERNIZAR A RAFB?	90
3.4	CONSIDERAÇÕES PRÁTICO-TEÓRICAS	94
3.5	GEOIDE OU QUASE GEOIDE PARA O BRASIL?	96
4	REFINAMENTOS PARA A SOLUÇÃO DO TIPO BROVAR.....	100
4.1	O PROBLEMA DE CONTOURNO FIXADO: LINEARIZAÇÃO E APROXIMAÇÃO ESFÉRICA	100
4.2	A SOLUÇÃO DE BROVAR	101
4.3	O DISTÚRBO DO POTENCIAL	107
4.4	MODIFICAÇÃO PARA O NÚCLEO DA INTEGRAL DE HOTINE	111
4.5	EFEITO ELIPSOIDAL PARA O PVCG FIXADO.....	113
4.5.1	Distúrbio de gravidade	115
4.5.2	Anomalia de altitude.....	120
4.6	DE ANOMALIAS DE GRAVIDADE PARA DISTÚRBIOS DE GRAVIDADE	121
5	O PVCG FIXO - ESTUDOS DE CASOS	124
5.1	QUASE GEOIDE DE ALTA RESOLUÇÃO PARA BADE-VURTEMBERGA	124
5.1.1	Dados de entrada	124
5.1.1.1	Modelo digital de elevação	124
5.1.1.2	Longos comprimentos de onda: Earth Gravity Model 2008	129
5.1.1.3	Observações gravimétricas: módulo da intensidade de gravidade	132
5.1.2	O quase geoide para o Estado de Bade-Vurtemberg	138
5.2	O QUASE GEOIDE PARA O ESTADO DO PARANÁ	142
5.2.1	Dados de entrada	143
5.2.1.1	Modelo digital de elevação	143
5.2.1.2	Observações gravimétricas: módulo da intensidade de gravidade	145
5.2.2	O quase geoide para o Paraná	148

6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	156
6.1	CONCLUSÃO	156
6.2	RECOMENDAÇÕES	157
	REFERÊNCIAS	159

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

No Brasil, recentemente, tem se discutido a necessidade da Modernização do Sistema de Altitudes para que atenda, em vista das novas tecnologias espaciais, as diferentes classes de usuários de altitudes. Um sistema de altitudes moderno permite a determinação de altitudes em relação ao *datum* vertical em todos os lugares de um país empregando-se as técnicas emergentes da tecnologia GNSS, acrônimo para *Global Navigation Satellite System*. O GNSS iniciou uma nova era no posicionamento geodésico, podendo, dependendo da precisão exigida, substituir as técnicas tradicionais de nivelamento. Todavia, o GNSS, em particular o GPS (*Global Positioning System*), fornece coordenadas geodésicas relacionadas a um elipsoide de referência. No entanto, altitudes elipsoidais¹ obtidas com o GPS não são relacionadas com uma particular superfície equipotencial (geoide) para o campo de gravidade terrestre. Apesar de a altitude elipsoidal ser empregada para a maioria das atividades relacionadas ao posicionamento, existe um conjunto de atividades específicas, principalmente relacionadas com a hidrodinâmica e a transferência de massa, que requerem altitudes vinculadas ao campo de gravidade terrestre.

Uma linha de pesquisa com base na Geodésia Relativística tem atuado medindo a diferença de geopotencial por sinais eletromagnéticos. Em tese, devido à mudança de frequência de um sinal de onda eletromagnética entre dois pontos *A* e *B*, por exemplo, sobre a superfície terrestre, pode-se determinar a diferença de altitude dinâmica entre estes dois pontos com base na equação de mudança de frequência da gravidade. Considerando o avanço na precisão dos relógios atômicos e progressiva disponibilidade, torna-se de interesse prático aplicar o problema inverso, *i.e.*, a determinação das altitudes por comparação das taxas de frequências dos relógios atômicos para diferentes pontos sobre a Terra. No entanto, para atingir uma variação de altitude de 1 cm, a estabilidade da frequência deve ser da ordem de 10^{-18} e efeitos relativísticos de segunda ordem devem ser eliminados. Sendo esta uma abordagem viável para um futuro remoto. Pormenores sobre esta abordagem podem ser vistos em: Bjerhammar (1985); Brumberg e Groten (2002); Shen e Ning (2005); Shen et al. (2008); Shen, Tian e Hou (2009).

Não obstante, do ponto de vista da Geodésia Física, para atingir o propósito de determinar altitudes vinculadas ao campo de gravidade terrestre com precisão centimétrica,

¹ Alguns autores tem preferido o termo Altitude Geodésica ao invés de Altitude Elipsoidal, porém, o termo altitude geodésica não será adotado nesta tese.

deve-se utilizar *um modelo geoidal associado com as altitudes elipsoidais* ou *nivelamento associado à gravimetria*. Se estas duas abordagens forem conduzidas sem erros, elas, obrigatoriamente, produzem os mesmos resultados. A técnica de nivelamento geométrico é um método muito bem conhecido há mais de 200 anos. Apesar de ser um método preciso para determinar desníveis, o nivelamento geométrico é caro, moroso, e difícil de realizar em áreas remotas. A alternativa que atende as diretrizes básicas para um sistema de altitudes moderno é a que possibilita o uso do GNSS na determinação de altitudes.

Para converter altitudes elipsoidais (h) em altitudes ortométricas (H^O) é necessário o uso de um modelo para as alturas geoidais (N) da seguinte forma:

$$H^O \approx h - N, \quad (1)$$

muito embora, não seja uma superfície equipotencial, pode-se ainda utilizar o modelo quase geoidal para o caso de altitudes normais (H^N) como segue:

$$H^N \approx h - \zeta, \quad (2)$$

em que ζ é a anomalia de altitude definida, segundo a Teoria de Molodenskii (MOLODENSKII; EREMEEV; YURKINA, 1962). O sinal de aproximado nas relações (1) e (2) diz respeito ao fato de que as altitudes evidenciadas são contadas em diferentes linhas de campo.

No entanto, este trabalho vislumbra mais que a aplicação direta das relações (1) e (2). Pretende-se aqui, determinar diretamente o número geopotencial (C), grandeza de fundamental importância na definição das altitudes (normal, ortométrica e dinâmica). Heiskanen e Moritz (1967) definem número geopotencial como sendo a diferença de potencial para um ponto sobre o geoide e outro ponto sobre a superfície terrestre, convencionalmente, estes dois pontos são conectados através de nivelamento associado à gravimetria. Sendo assim, tem-se:

$$C(\varphi_P, \lambda_P, h_P) = W_0 - W(\varphi_P, \lambda_P, h_P), \quad (3)$$

em que, W_0 é o valor do geopotencial para o geoide e W_P é o valor do geopotencial para um ponto P qualquer sobre a superfície terrestre. Entretanto, o número geopotencial é abordado aqui como sendo:

$$C(\varphi_P, \lambda_P, h_P) = W_0 - T(\varphi_P, \lambda_P, h_P) - U(\varphi_P, \lambda_P, h_P), \quad (4)$$

sendo as novas grandezas físicas inseridas: U_P , o esferopotencial; T_P , o distúrbio do

potencial. O distúrbio do potencial aqui apresentado é definido como:

$$T(\varphi_P, \lambda_P, h_P) = W(\varphi_P, \lambda_P, h_P) - U(\varphi_P, \lambda_P, h_P), \quad (5)$$

destacando-se que o mesmo não será chamado de potencial anômalo como faz, por exemplo, Heiskanen e Moritz (1967).

A partir da (4), para obter-se o número geopotencial em um ponto qualquer sobre a superfície terrestre, faz-se necessário o conhecimento do distúrbio do potencial para este ponto. Esta afirmativa abriu caminho para o uso do Problema de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG). Segundo Gelederen e Rummel (2001), o PVCG é o ponto de partida para o cálculo e determinação do campo de gravidade, *i.e.*, partindo-se de medidas sobre a superfície terrestre e delas calcula-se um modelo geoidal por exemplo. Entretanto, neste trabalho dar-se-á ênfase na solução do PVCG em sua versão fixada. De acordo com Heck e Seitz (1993), se a superfície terrestre é usada como superfície de contorno, tem-se então o PVCG em sua versão fixada. Note-se ainda, que para a (4), o campo de gravidade normal para o elipsoide de referência é definido pela Teoria de Somigliana-Pizzetti, *cf.* Pizzetti (1894) e Somigliana (1930), e o potencial normal de gravidade e todas as suas derivadas são conhecidas para o espaço exterior ao elipsoide de referência.

Hotine (1969) propôs uma solução para o distúrbio do potencial usando distúrbios de gravidade como dados de entrada. No entanto, ele previa o uso do distúrbio de gravidade sobre o geoide. O uso do distúrbio de gravidade para a determinação do geoide foi intensivamente investigado por diversos autores, dentre eles *e.g.*: Hotine (1969); Koch e Pope (1972); Jekeli (1980); Bjerhammar e Svensson (1983); Vaníček, Changyou e Sjöberg (1992); Kirby (2003); entre outros. No entanto, o uso do distúrbio de gravidade sobre o geoide desvirtua o senso natural desta grandeza que é a sua avaliação sobre a superfície terrestre. Atualmente, medidas acuradas sobre a superfície terrestre podem chegar à ordem do centímetro com o uso do GPS. A altitude elipsoidal pode ser agora facilmente determinada com qualidade. A precisão para medidas da gravidade pode alcançar poucos microgal e, conseqüentemente, o distúrbio de gravidade pode ser facilmente obtido com acurácia.

Stock (1983) desenvolveu a solução de Molodenskii para o PVCG utilizando a superfície terrestre como condição de contorno; a superfície terrestre pode ser considerada como conhecida com o uso do GPS, por exemplo. Moritz (2000) apresentou a solução com base em Molodenskii, porém com o auxílio da continuação analítica para os termos das séries. Este autor tem chamado este cenário de Problema de Contorno do GPS, termo também empregado por Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006). Como exemplo de aplicação

cita-se Zhang et al. (2009) que empregaram distúrbios de gravidade sobre a superfície terrestre diretamente para a solução do PVCG fixado na conexão de *data* verticais. Em Jinhai e Chuanding (2005) é apresentado o Problema de Contorno do GPS-gravimetria em que eles usam duas etapas: inicialmente prolongam-se os valores medidos sobre a superfície terrestre para o elipsoide de referência e em seguida busca-se a solução integral do problema de Neumann externamente ao elipsoide. Cita-se ainda Auz e Otero (2002) que empregaram o método proposto por Sansò (1993) para a mudança de contorno evitando a continuação analítica descendente que é um problema mal posto. No entanto, a solução destes autores é idêntica a solução de Moritz (2000).

Čunderlík, Mikula e Mojzeš (2008) empregaram o Método dos Elementos de Contorno (MEC), do inglês *Boundary Element Method* (BEM), para a solução do PVCG fixado. O MEC é um método computacional para a solução de sistemas de equações diferenciais formuladas em forma integral. O método possui melhor desempenho que o Método dos Elementos Finitos (MEF), do inglês *Finite Element Method* (FEM), em certas circunstâncias, como por exemplo, quando o domínio de estudo for infinito ou semi-infinito. Segundo Fašková, Čunderlík e Mikula (2010), uma vantagem do MEF em relação ao MEC está em que o MEF fornece o potencial no domínio computacional tridimensional enquanto que o MEC em uma hipersuperfície. As duas técnicas trazem como vantagem de que a solução local não depende dos funcionais de um Modelo Global do Geopotencial (MGG) em comparação com as soluções baseadas na técnica *remove-restore*² por exemplo. Os trabalhos pioneiros empregando-se o MEC, no contexto do tópico determinação do campo de gravidade, são: Klees (1995) e Lehmann (1997); e, empregando-se o MEF são: Meissl (1981) e Shaofeng e Dingbo (1991).

Em contrapartida, nesta tese deseja-se obter uma solução que se baseia no método de Brovar (BROVAR, 1964), originalmente aplicada ao problema de Molodenskii para solucionar o terceiro PVCG, e permite uma representação em termos de solução do problema da derivada normal somando-se adequados termos de correção. O próprio Brovar, *cf.* Brovar (1972), apresentou de forma resumida a solução do PVCG fixado como uma possibilidade de melhoramento da precisão do campo de gravidade na Geodésia. Recentemente Heck (2010) mostrou, entre as soluções analíticas já mencionadas, que a solução de Brovar possui muitas similaridades com respeito as soluções clássicas do PVCG escalar livre.

A solução de Brovar é mais simples que à solução de Molodenskii pelo fato desta última empregar dois conjuntos de quantidades, G_n e χ_n , ao passo que com a primeira tem-

² Aqui traduzido como: decomposição espectral, pormenores vejam a Seção 2.3.

se apenas μ_n . A solução é compatível com as atuais técnicas de suavização do campo de gravidade externo quando da solução empregando-se: a técnica da decomposição espectral dos funcionais do geopotencial; redução para as massas topo-isostáticas; modelagem residual de terreno; uso de um MGG de alta resolução; integração sobre uma calota esférica modificando-se o núcleo de Hotine.

Melhorias na precisão da observação do módulo da intensidade de gravidade e posicionamento, graças ao GNSS, exigem a revisão das técnicas de determinação do geóide (quase geóide). Ou seja, precisam-se disponibilizar teorias compatíveis com a precisão das modernas técnicas de observações. Neste sentido, propõem-se a solução do tipo Brovar para o PVCG fixado, bem como refinamentos para que a precisão compatível com as modernas técnicas de posicionamento GNSS possa ser alcançada. A Figura 1 apresenta de forma resumida as etapas envolvidas no cálculo dos números geopotenciais a partir de coordenadas derivadas do posicionamento GNSS associado com a gravimetria.

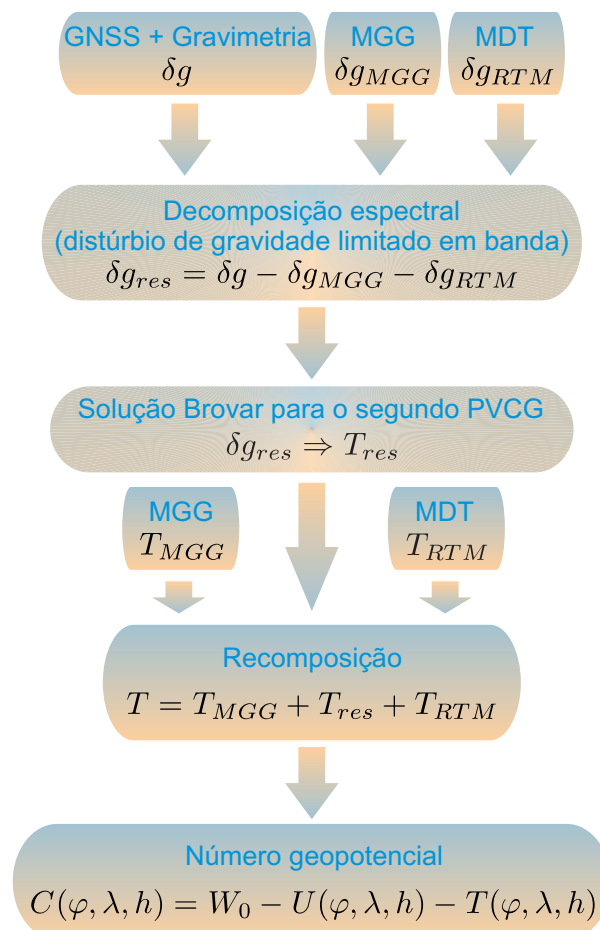


Figura 1 - Fluxograma de cálculo de números geopotenciais em uma abordagem moderna

Fonte: O autor

Esta nova abordagem tem em vista a Modernização do Sistema de Altitudes do

Brasil, tornando-o compatível com o conceito de um sistema de altitudes moderno. Esta metodologia permite fornecer um sistema de referência vertical definido por números geopotenciais de modo que os mesmos são vinculados a um Sistema Global de Altitudes (SGA), *cf.* Ihde e Sánchez (2005). Os números geopotenciais são constantes ao longo de uma dada superfície equipotencial, ou seja, é a única forma de garantir que dois ou mais pontos estejam em nível. A conversão de números geopotenciais em altitudes do tipo ortométricas ou normais - para que tenham uma interpretação geométrica - podem ser consideradas como produtos derivados e não parte definitiva de um sistema de referência vertical.

1.2 OBJETIVOS DA INVESTIGAÇÃO

1.2.1 Objetivo geral

Desenvolver uma metodologia com base no Segundo Problema de Valor de Contorno da Geodésia para a futura modernização do sistema de altitudes do Brasil, sendo a superfície terrestre utilizada como condição de contorno.

1.2.2 Objetivos específicos

- Desenvolver um novo método para a correção elipsoidal com base em harmônicos esféricos para o PVCG fixado;
- Desenvolver um método para a determinação de números geopotenciais usando-se observações GPS associadas com um modelo representativo do distúrbio do potencial;
- Analisar um número ótimo, qualidade, e distribuição de dados gravimétricos no contexto do segundo PVCG.
- Investigar um método preciso para converter altitudes ortométricas-normal em altitudes normais;

1.3 CONTRIBUIÇÃO DO AUTOR

Como contribuição, nesse trabalho apresenta-se o desenvolvimento matemático da solução do segundo PVCG empregando-se a solução tipo Brovar, que até então era aplicada somente ao problema simples de Molodenskii no contexto do terceiro PVCG. Demonstra-se ainda como o posicionamento GPS pode ser eficientemente combinado com

informações de gravidade em um PVCG para a determinação do quase geoide. Os resultados, apesar de algumas lacunas nos dados (por exemplo, indisponibilidade de posicionamento GPS e uma pobre cobertura geométrica dos dados de gravidade), são promissores. Todo o trabalho é norteado objetivando-se a modernização de sistemas de altitudes, em que o GPS é o principal protagonista. Outras contribuições, porém, não menos importantes, são encontradas ao longo de todo o corpo desta tese.

1.4 ESTRUTURA DA TESE

Os aspectos teóricos relacionados com a determinação de altitudes bem como de técnicas tradicionais de solução do PVCG e suas aplicações com base para uma nova estratégia na determinação de altitudes são discutidos no Capítulo 2.

Uma revisão sobre os problemas relacionados com a obtenção de altitudes com significado físico baseado na Rede Altimétrica Fundamental Brasileira (RAFB) é apresentado no Capítulo 3. Estes problemas impõem um obstáculo para a integração da RAFB ao Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas (SIRGAS), considerando a larga extensão sem adequada cobertura de dados gravimétricos e a falta de estratégias face do problema mencionado. A presente configuração da RAFB, existindo dados relatados e limitações para a implementação deles com base em técnicas de nivelamento convencional associados com dados da gravidade é considerada neste capítulo.

Os aspectos teóricos relacionados com a solução do PVCG fixado e suas aplicações com base para uma nova estratégia na determinação de altitudes são discutidos no Capítulo 4. A consideração para a superfície terrestre como a superfície de contorno e as estratégias necessárias para chegar a uma solução linear é abordada. Posicionamento por satélites GPS avaliado com dados de gravidade são considerados na modelagem do distúrbio do potencial para a superfície terrestre.

No Capítulo 5, a metodologia a ser empregada nesta pesquisa é avaliada. A discussão é focada principalmente na necessidade de um cenário estabelecendo estratégias com vistas aos problemas mencionados no capítulo 3. Possíveis considerações resultantes dos novos modelos do geopotencial (*e.g.* EGM2008) bem como a alta resolução dos mesmos. As metodologias discutidas no Capítulo 4 são implementadas em duas etapas: na primeira etapa, dados selecionados a partir do banco de dados geodésico do Estado Federal de *Baden-Württemberg*³, Alemanha é empregado, entretanto, com um controle ótimo; na segunda etapa dados a partir de uma área teste no Brasil são considerados.

Por último apresenta-se as conclusões no Capítulo 6.

³ Em português *Bade-Vurtemberg*.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 SISTEMAS DE ALTITUDES

Atualmente, no Brasil existe um intenso movimento para a modernização do sistema de altitudes e promover a sua conexão a um SGA. Em face do exposto, apresenta-se aqui uma revisão de altitudes e um exame do sistema atualmente empregado no Brasil. A discussão aqui é restrita a quatro sistemas, a saber: ortométrica, normal, ortométrica-normal e elipsoidal. Mais informações e detalhes sobre sistemas de altitudes, consultar: Heiskanen e Moritz (1967); Vaníček e Krakiwsky (1986); Heck (2003a); Torge (2001); e Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006). Entretanto, é necessária uma revisão sobre números geopotenciais e os problemas sobre uma referência comum para os mesmos conforme preconiza Sánchez (2008).

2.1.1 Número geopotencial e altitude dinâmica

Considere a Figura 2, na qual notam-se dois pontos A e B conectados por dois caminhos diferentes, existe um número infinito de possibilidades, o desnível geométrico Δn entre o ponto A e B , que é a soma dos elementos infinitesimais de nivelamento dn , é dado por:

$$\Delta n_{AB} = \int_A^B dn. \quad (6)$$

Considerando um circuito de nivelamento Γ como:

$$\Gamma \equiv (AB) \cup (BA) \forall (AB) \neq (BA), \quad (7)$$

nota-se que a (6) depende do caminho de integração e não é, em geral, igual a zero para um circuito:

$$\int_{\Gamma} dn \neq 0, \quad (8)$$

porque dn não é uma diferencial total. Ou seja, o nivelamento é dependente do qual caminho se escolhe para conectar os pontos A e B .

No entanto, independente de qual o caminho escolhido entre A e B , as diferenças de potencial são as mesmas:

$$W_B - W_A = - \int_A^B g dz. \quad (9)$$

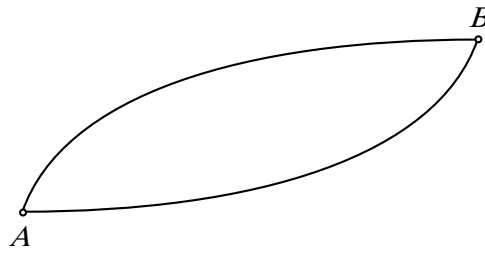


Figura 2 - Duas linhas diferentes de nivelamento conectando A e B

Fonte: Heiskanen e Moritz (1967)

Nota: Estas linhas tomadas em conjunto formam um circuito.

sendo dz a separação entre duas superfícies geopotenciais infinitamente próximas. Se considerado o circuito fechado Γ a integração deve ser zero, como:

$$\int_{\Gamma} \langle \vec{g}, d\vec{s} \rangle = 0, \quad (10)$$

devido ao fato de \vec{g} ser irrotacional (desconsiderando variações temporais), $d\vec{s}$ representa um vetor elementar de componentes dx, dy, dz e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto escalar de vetores.

Esta é uma propriedade importante que faz com que a diferença de potencial (números geopotenciais) seja holonômica⁴. O espaçamento entre as superfícies de nível ou equipotenciais do campo de gravidade real varia com a latitude (e o mesmo pode ser inferido para as superfícies do campo de gravidade normal) e também de acordo com a distribuição lateral de massas na crosta terrestre, enquanto a diferença de geopotencial entre as mesmas é constante em toda a sua extensão. O número geopotencial, portanto, é uma grandeza unívoca, independente do trajeto seguido para o deslocamento entre duas superfícies equipotenciais, e tem significado físico real na definição da altitude com relação à superfície de referência, o que não ocorre com os desníveis medidos geometricamente.

Conforme já apresentado nas considerações iniciais, o número geopotencial C para o ponto A , por exemplo, sobre a superfície terrestre é a diferença entre o valor do geopotencial W_0 sobre o geoide, ou para uma referência local como é a maioria dos casos dos *data* verticais existentes, e o valor do geopotencial W_A para A . De acordo com Torge

⁴ Sistema de altitudes holonômicos é caracterizado por sofrer restrições holonômicas quando do seu transporte. Restrições holonômicas são restrições de igualdade sobre as configurações Γ de um circuito, ou seja:

$$G(\Gamma) = 0.$$

Este tipo de restrição não limita as direções que o desenvolvimento de uma poligonal de nivelamento possa executar.

(2001) o número geopotencial é dado por:

$$C_A = W_0 - W_A = \int_0^A g dz. \quad (11)$$

Na prática, não se dispõe de uma distribuição contínua das grandezas envolvidas no cálculo do número geopotencial. Portanto, a integral da (11) deve ser substituída por um somatório sobre um conjunto discreto de valores médios da gravidade entre pontos nos quais foram observados valores de gravidade e desníveis, porém faz-se antes dz .

Note-se que a partir desta última integral precisa-se da referência W_0 , ou seja uma superfície equipotencial coincidente com a origem para as altitudes de um país, esta origem denomina-se como *datum*. Um *datum* é definido como qualquer quantidade numérica ou geométrica, ou conjunto de tais quantidades que servem como referência ou base para outras quantidades (JEKELI, 2000). Nesse sentido, o *datum* vertical é uma referência para as altitudes. Na maioria dos casos, o *datum* vertical é definido através da média de observações maregráficas em um dado ponto costeiro, a posição vertical que se encontra esta média é definida com altitude igual a zero, a partir daí, soma-se a este valor os desníveis medidos, devidamente corrigidos e ajustados, e transporta-se a altitude para todo o país. Na prática não é necessário o valor absoluto de W_0 , pois trabalha-se com diferenças relativas de potencial, o que dá uma conotação local para estes.

Formalmente pode-se definir a altitude dinâmica H^D , como:

$$H^D = \frac{C}{\gamma_0}, \quad (12)$$

em que γ_0 é a gravidade normal para uma latitude arbitrária, geralmente 45° . Obviamente a altitude dinâmica difere do número geopotencial somente por um fator de escala. A altitude dinâmica preserva a condição holonômica discutida para os números geopotenciais.

É interessante converter o desnível geométrico Δn em diferença de altitude dinâmica adicionando uma correção denominada por Heiskanen e Moritz (1967, p. 163) de correção dinâmica (CD) dada por:

$$CD_{AB} = \int_A^B \frac{g - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} dn, \quad (13)$$

ou seja

$$\Delta H_{AB}^D = \Delta n_{AB} + CD_{AB}, \quad (14)$$

se somado o termo CD ao desnível Δn tem-se uma alternativa para a (9).

Para todo o tipo de altitude, pode-se escrever uma equação como:

$$\Delta H_{AB} = \Delta n_{AB} + CA_{AB}, \quad (15)$$

em que ΔH e CA são, respectivamente, incremento de uma altitude qualquer e sua correção com base em valores reais da gravidade. De modo que em uma rede de nivelamento para um circuito fechado Γ , pode-se escrever a equação de condição, como:

$$\int_{\Gamma} dn + \int_{\Gamma} dCA = 0. \quad (16)$$

A integral relativa a dCA , elemento infinitesimal de correção de altitude, pode ser realizada na prática somente empregando-se uma versão discreta. Esta versão discretizada introduz erros, ou seja:

$$\sum_{\Gamma} \Delta n + \sum_{\Gamma} \Delta CA \doteq 0, \quad (17)$$

que em um processo de ajustamento por mínimos quadrados, por exemplo, são devidamente distribuídos.

Suponha a altitude H definida como:

$$H = \frac{W_0 - W_P}{G} = \frac{\int_0^P g dn}{G}, \quad (18)$$

onde G é uma função de posição diferente de zero, esta altitude é holonômica. Para quaisquer dois pontos A e B , separados por uma distância finita, pode-se escrever:

$$H_A = \frac{\gamma_0}{G_A} H_A^D, \quad (19)$$

e

$$H_B = \frac{\gamma_0}{G_B} H_B^D. \quad (20)$$

A diferença entre a (20) e a (19) fornece:

$$H_B - H_A = \int_A^B dH^D + \frac{\gamma_0 - G_B}{G_B} H_B^D - \frac{\gamma_0 - G_A}{G_A} H_A^D, \quad (21)$$

que pode ser escrita como:

$$\Delta H_{AB} = \Delta H_{AB}^D + CH_{AB}. \quad (22)$$

Nota-se que CH_{AB} é independente do caminho de integração, ou seja:

$$\int_{\Gamma} dCH = 0. \quad (23)$$

É evidente que diferentes funções de posição G no denominador da (18) não interferem na característica holonômica de H . Vaníček (1982) conclui que qualquer altitude conforme a (18) é um sistema de altitude holonômico.

2.1.2 Altitude ortométrica

A altitude ortométrica H^O é definida como a distância geométrica desde a superfície do geoide até um ponto na superfície terrestre medida ao longo da linha de força⁵ do campo de gravidade real que passa por este ponto. A Figura 3 mostra a altitude ortométrica como sendo o segmento da linha de força (\widetilde{PP}_0) partindo de P_0 até o ponto P .

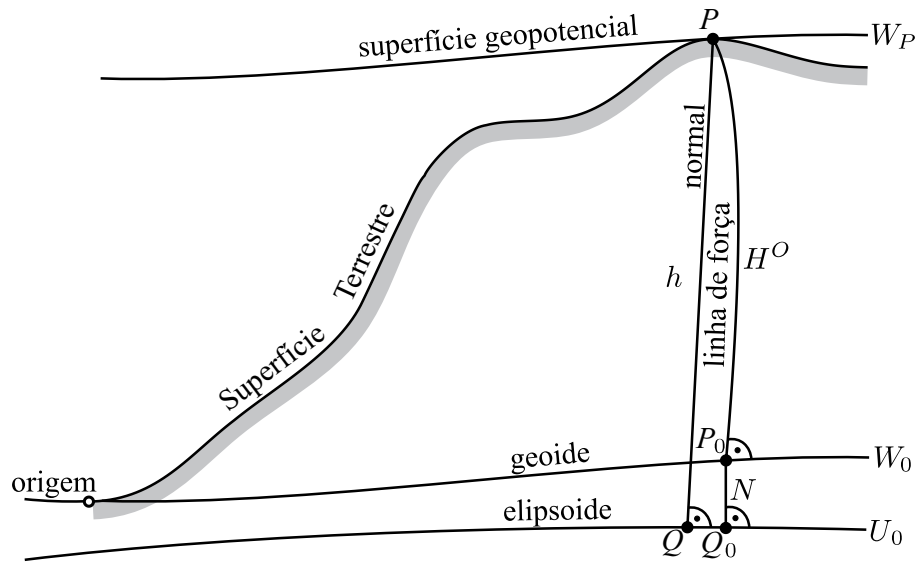


Figura 3 - Altitude ortométrica

Fonte: O autor

Nota: Note que a linha de força é uma curva reversa, e não é exatamente um segmento de arco como mostrado na figura, ela apresenta curvatura e torção.

Para o cálculo da altitude ortométrica (HEISKANEN; MORITZ, 1967):

$$H^O = \frac{C_P}{\bar{g}}, \quad (24)$$

o valor da gravidade deve ser o valor médio (\bar{g}) entre P_0 , no geoide, e o ponto P , ao longo da linha de força (a posição de \bar{g} é desconhecida sobre a linha de força), ou seja, (HEISKANEN; MORITZ, 1967):

$$\bar{g} = \frac{1}{H^O} \int_0^{H^O} g \cdot dH. \quad (25)$$

⁵ Ou linha de campo.

O problema inerente ao uso das altitudes ortométricas é que \bar{g} não pode ser determinado com rigor, pois não se conhece a verdadeira distribuição de densidade de massas ao longo da linha de força que passa em P_0 e P , necessitando-se então de um gradiente hipotético. Consequentemente, pode-se obter tantos sistemas de altitudes ortométricas quantos sejam os métodos utilizados para a estimativa de \bar{g} com a (25).

A afirmativa do parágrafo anterior é uma objeção que sempre existiu em relação às altitudes ortométricas, que elas não podem ser calculadas de forma precisa. Sendo assim é interpretado que todas as abordagens para a solução da equação (25) baseadas em fórmulas práticas usadas para calcular altitudes ortométricas são imprecisas. No entanto, Tenzer et al. (2005) e Kingdon et al. (2005) mostraram que altitudes ortométricas podem ser calculadas com uma precisão suficiente, talvez, alguns milímetros, em qualquer ponto da superfície terrestre.

Na Figura 3, segundo Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006, p. 192), o segmento $\overline{PQ} = h$ é conhecido como a Projeção de Helmert e o segmento $\widetilde{PP_0} + \overline{P_0Q_0}$ é a Projeção de Pizzetti, com o segmento $\overline{Q_0P_0} = N$ sendo a altura geoidal. A diferença entre a projeção de Pizzetti e a de Helmert é insignificante. A vantagem da projeção de Helmert é a relação direta com a altitude elipsoidal h determinada com o auxílio do GPS, por exemplo.

Pode-se ainda aplicar ao incremento de nivelamento Δn_{AB} uma de correção ortométrica CO_{AB} afim de transformá-lo em desnível ortométrico ΔH_{AB}^O da seguinte forma:

$$\Delta H_{AB}^O = \Delta n_{AB} + CO_{AB}, \quad (26)$$

em que

$$CO_{AB} = \int_A^B \frac{g - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} dn + \int_{A_0}^A \frac{g - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} dH^O - \int_{B_0}^B \frac{g - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} dH^O. \quad (27)$$

Estas integrais independem de γ_{45° , que é puramente uma constante considerando o mesmo SGR. Os pontos A e B estão localizados sobre a superfície terrestre, *cf.* Figura 2, e os pontos A_0 e B_0 são suas projeções sobre o geoide, respectivamente. O integrando g é diferente nas três integrais, ele equivale a posição dos elementos infinitesimais de desnível geométrico dn ao longo do circuito Γ e altitude ortométrica dH^O ao longo das linhas de força passantes pelos pontos de interesse A e B .

2.1.3 Altitude normal

Proposto por Molodenskii em 1945, a altitude normal objetiva contornar o problema de determinação da gravidade média ao longo da linha de força entre a superfície terrestre e o geoide. O seu princípio é uma consequência do uso de observações sobre a superfície

terrestre, sem realizar nenhum tipo de redução às observações e com isso evitando-se, entre outras aproximações, o não conhecimento da densidade crustal na vizinhança e ao longo da linha de força.

A Figura 4 mostra um ponto P para a superfície terrestre ao longo da normal ao ponto Q_0 no elipsoide. Nesta figura, Q é o ponto sobre o qual o número esferopotencial é igual ao número geopotencial para P , i.e., $U_Q - U_0 = W_P - W_0$ não sendo requerido o potencial absoluto W_P . A variação do ponto P ao longo da superfície terrestre significa que os respectivos pontos Q descrevem a superfície Σ chamada de teluroide, que pode ser interpretado como uma suavização da superfície terrestre.

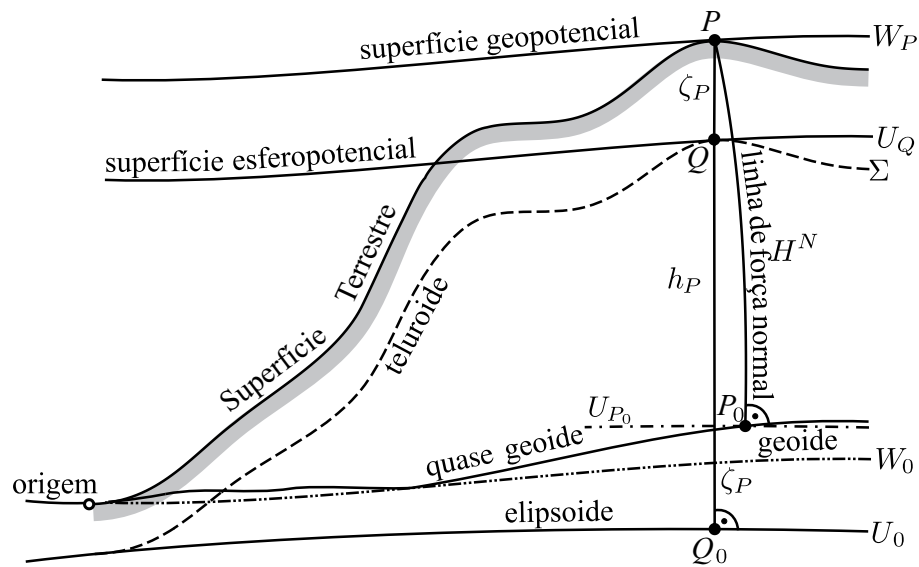


Figura 4 - Altitude normal H^N e anomalia de altitude ζ

Fonte: O autor

Esta superfície foi designada primeiro por Molodenskii de *geoid of the nonregularized earth*, e depois por Hirvonen, de teluroide Σ . O caso específico em que $W_P = U_Q$, Figura 4, o teluroide é conhecido como Teluroide de Marussi, isso devido ao fato do emprego das Coordenadas de Marussi:

$$\begin{cases} \varphi_Q = \Phi_P \\ \lambda_Q = \Lambda_P \\ U_Q = W_P \end{cases}, \quad (28)$$

Φ e Λ são, respectivamente, a latitude astronômica e a longitude astronômica, cf. Moritz (1980, capítulo 41). Pode-se ainda empregar a condição $g_P = \gamma_Q$, então, tem-se o Teluroide Gravimétrico. Existem vários tipos de teluroide dependendo de como se procede a denominada modelagem do teluroide; para pormenores consultem, por exemplo, Grafa-

rend (1978); Ardalan, Grafarend e Ihde (2002).

A distância contada ao longo da linha de força do campo de gravidade da Terra normal (linha de força normal) entre a superfície física e o quase geoide, PP_0 , denomina-se de altitude normal (H^N). A separação entre a superfície física e o teluroide ou ainda entre o quase geoide e o elipsoide de referência recebe o nome de anomalia de altitude (ζ).

A altitude normal é dada por (HEISKANEN; MORITZ, 1967):

$$H^N = \frac{C_P}{\bar{\gamma}(\varphi, H^N)}. \quad (29)$$

O valor da gravidade média ($\bar{\gamma}$) entre o elipsoide de referência e o ponto de altitude normal H^N ao longo da linha de força normal, pode ser calculado por:

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{H^N} \int_0^{H^N} \gamma dH^N. \quad (30)$$

Note-se que a equação (29) tem uma solução iterativa juntamente com a (30).

Pode-se ainda aplicar ao incremento de nivelamento Δn_{AB} uma correção normal CN_{AB} afim de transformá-lo em desnível normal ΔH_{AB}^N da seguinte forma:

$$\Delta H_{AB}^N = \Delta n_{AB} + CN_{AB}, \quad (31)$$

em que

$$CN_{AB} = \int_A^B \frac{g - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} dn + \int_{A_0}^{A_Q} \frac{\gamma - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} dH^N - \int_{B_0}^{B_Q} \frac{\gamma - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} dH^N. \quad (32)$$

Os pontos A_0 e B_0 são as projeções sobre o elipsoide dos pontos A e B bem como, os pontos A_Q e B_Q são projeções sobre o teluroide, respectivamente. O integrando g equivale a posição dos elementos infinitesimais de desnível geométrico dn e o integrando γ ao elemento infinitesimal de altitude normal dH^N .

2.1.4 Altitude ortométrica-normal

Estas altitudes não são nem ortométricas, nem normais, ou seja, elas não são referidas ao geoide ou ao quase geoide como a ortométrica e a normal, respectivamente. Elas são determinadas empregando-se a gravidade normal ao invés da gravidade real, porém, empregando-se a formulação matemática das altitudes ortométricas. Altitudes ortométricas-normal são empregadas no Brasil porque não havia medidas de gravidade disponíveis no momento da realização da Rede Altimétrica Fundamental Brasileira (RAFB).

O objetivo de empregar esta correção aos desníveis antes do ajustamento visava à determinação de “altitudes ortométricas” mais precisas, o que explica por que elas são comumente, porém erroneamente, referidas como altitudes ortométricas no Brasil.

Segundo Heck (2003a), a altitude ortométrica-normal H^{ON} é dada por:

$$H^{ON} = \frac{C'_P}{\bar{\gamma}(\varphi, H^{ON})}, \quad (33)$$

onde C' é o número esferopotencial dado por:

$$C' = \int_{P_0}^P \gamma dn, \quad (34)$$

e pode ainda ser calculado como:

$$C'_P = U_{ref} - U_P. \quad (35)$$

A altitude ortométrica-normal não tem significado físico, *i.e.*, uma superfície de referência, como para a altitude normal ou a ortométrica, é complicada de ser realizada (FIGURA 5).

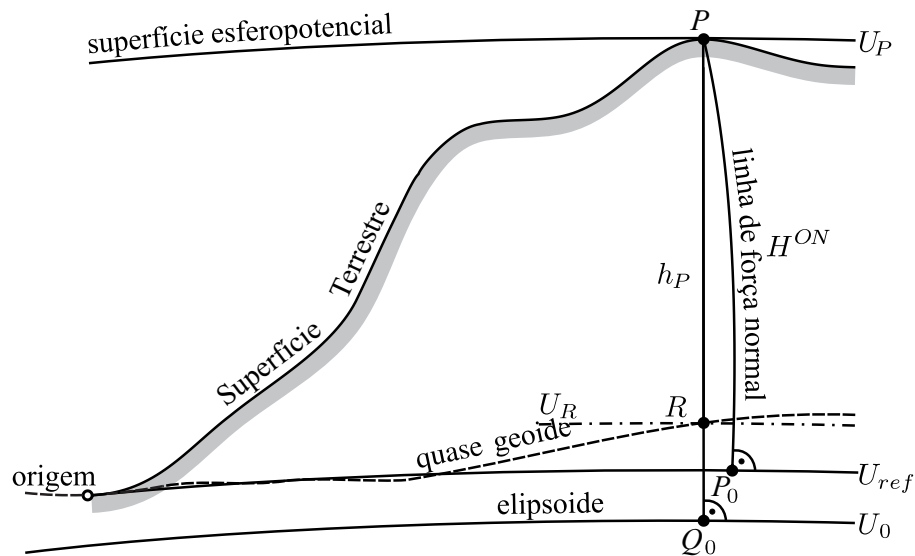


Figura 5 - Altitude ortométrica-normal

Fonte: O autor

As altitudes ortométricas-normal podem ser obtidas aplicando-se a correção ortométrica-normal (CON_{AB}) para os desníveis geométricos Δn_{AB} afim de transformá-los em desníveis ortométricos-normal ΔH_{AB}^{ON} da seguinte forma:

$$\Delta H_{AB}^{ON} = \Delta n_{AB} + CON_{AB}, \quad (36)$$

em que

$$CON_{AB} = \int_A^B \frac{\gamma - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} dn + \int_{A_0}^A \frac{\gamma - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} dH^{ON} - \int_{B_0}^B \frac{\gamma - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} dH^{ON}. \quad (37)$$

Os pontos A e B estão localizados sobre a superfície terrestre e os pontos A_0 e B_0 são suas projeções sobre a superfície de referência para as altitudes ortométricas-normal. O integrando γ é diferente nas três integrais, ele equivale a posição dos elementos infinitesimais de desnível geométrico dn ao longo do circuito Γ e ao longo da linha de força normal para os respectivos pontos A e B em que os elementos infinitesimais de altitude ortométrica-normal dH^{ON} encontram-se.

Em Heck (2003a) é apresentado uma fórmula prática para a correção ortométrica-normal:

$$CON_{AB} = -\frac{f^*}{R} \cdot \sum_A^B H_A^{ON} \cdot \sin 2\bar{\varphi} \cos \alpha_{AB} \cdot \delta s_{AB} + \dots, \quad (38)$$

onde f^* é uma constante relativa ao “achatamento de gravidade” normal, $f^* = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a}$; γ_a é a gravidade normal para o equador; γ_b é a gravidade normal para o polo; R é o raio médio terrestre; H_A^{ON} é a altitude para o ponto de partida (A); $\bar{\varphi}$ é a latitude média entre os pontos A e B ; α azimuth entre os pontos A e B ; δs é a distância horizontal entre os pontos A e B .

2.1.5 Altitude elipsoidal

A altitude elipsoidal (h) é a distância a partir da superfície terrestre (P) para o elipsoide de referência medida ao longo da normal (FIGURA 6). Alguns autores, dentre eles destaca-se Vaníček (1998), tem preferido o termo altitude geodésica no lugar de altitude elipsoidal, porém, entende-se aqui que todas as altitudes definidas anteriormente são altitudes geodésicas, o termo altitude geodésica é genérico.

Uma característica da altitude elipsoidal é que ela não é relacionada com o campo de gravidade terrestre. Pontos com a mesma altitude elipsoidal não descrevem uma superfície equipotencial, ou seja, não estão em nível. Cabe a importante reflexão que o mesmo se aplica para as altitudes normais e as ortométricas. Caso deseje-se descrever uma superfície equipotencial a recomendação é trabalhar com números geopotenciais constantes, ou ainda com altitude dinâmica, que nada mais é do que a conversão de números geopotenciais em altitude pela divisão destes por um valor constante de gravidade (usualmente $\gamma = 45^\circ$).

Na Figura 6, destaque-se ainda o segmento medido ao longo da normal denominado de raio de curvatura da seção do primeiro vertical N_P . Infelizmente existe um conflito

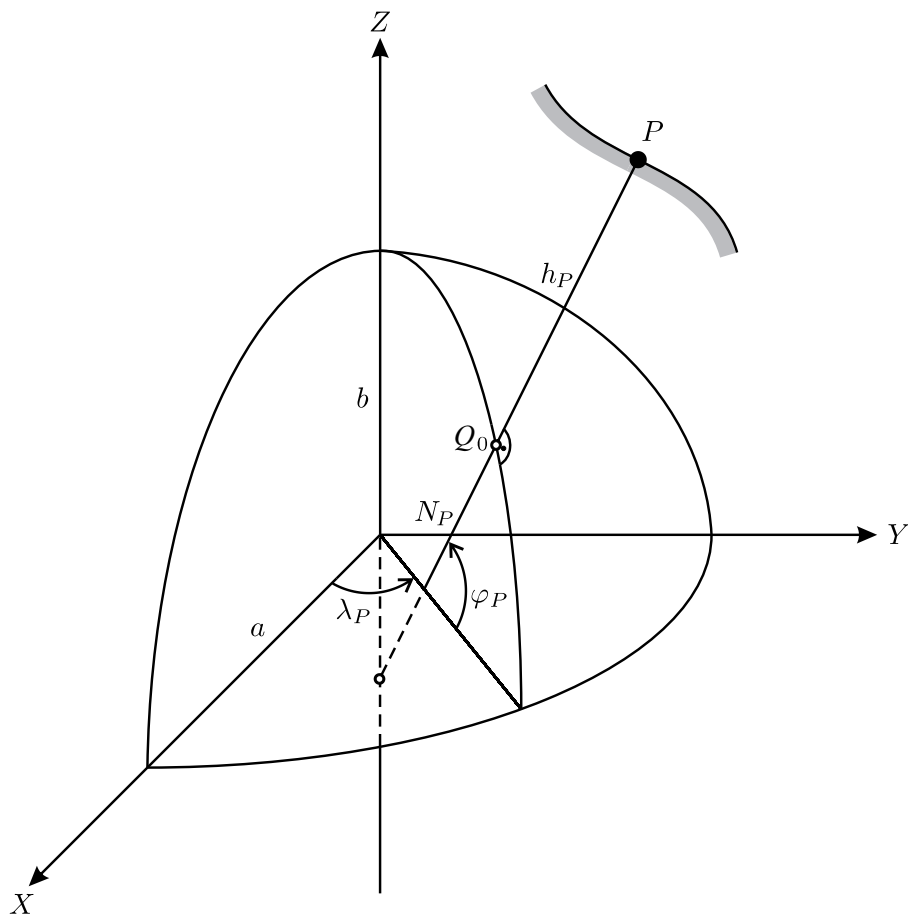


Figura 6 - Altitude elipsoidal

Fonte: O autor

Nota: A altitude elipsoidal é exatamente a distância $h_P = \overline{PQ_0}$ contada sobre raio de curvatura da seção do primeiro vertical entre os pontos P e Q_0 , ou seja um segmento de reta.

de notação aqui. Denotando ambos o raio de curvatura da seção do primeiro vertical e a altura geoidal por N por ser bem estabelecida na literatura geodésica. Continua-se com esta prática aqui, apesar de existir uma pequena chance de confusão. A distinção entre ambas as grandezas dependerá apenas do contexto.

A altitude elipsoidal relaciona-se com a ortométrica e a normal através das relações:

$$H^O \approx h - N, \quad (39)$$

$$H^N \approx h - \zeta. \quad (40)$$

O sinal de aproximado nas (39) e (40) se dá devido ao fato de que as diferentes altitudes são medidas em diferentes linhas de campos. Uma discussão sobre este problema pode ser encontrada em Jekeli (2000) e também Sjöberg (2006a).

Aqui será considerada também a diferença entre a altitude elipsoidal e a ortométrica-

normal como:

$$H^{ON} \approx h - \eta. \quad (41)$$

O objetivo desta análise é pelo fato de que quando se determina altitudes elipsoidais através do posicionamento por satélites artificiais sobre as atuais referências de nível (RNs) do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) determina-se a separação η , aqui denominado como “altura geoidal-normal”, e não a altura geoidal como muitos autores descrevem na literatura nacional. O sinal de aproximado na (41) se dá devido aos mesmos motivos que os das (39) e (40). Deste ponto em diante considera-se as altitudes ortométrica, normal, e ortométrica-normal referidas à projeção de Helmert, resultando em:

$$h = H^O + N, \quad (42)$$

$$h = H^N + \zeta, \quad (43)$$

e

$$h = H^{ON} + \eta. \quad (44)$$

2.1.6 A separação entre o quase geoide e o geoide

Muito embora seja um tópico de certo modo bem resolvido na Geodésia, ele tem recebido atenção especial nestes últimos anos, como pode ser visto em Sjöberg (2010); Flury e Rummel (2009); Sjöberg (2006a); Sjöberg (2006b), entre outros. Uma transformação precisa entre altitudes normal e ortométrica faz-se necessário, isso devido ao fato de que países vizinhos ao Brasil, por exemplo, poderem adotar sistemas de altitudes diferentes, muito embora possa existir uma referência unívoca para os números geopotenciais entre os mesmos.

Em Heiskanen e Moritz (1967), é sugerido igualar as (24) e (29) em termos do número geopotencial e levando em consideração as (42) e (43) pode-se escrever:

$$N - \zeta = \frac{\bar{g} - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} H^O, \quad (45)$$

sendo esta relação a separação entre o geoide e o quase geoide. O problema em determinar a separação entre a altitude ortométrica e normal, que é o mesmo que determinar a diferença entre a anomalia de altitude e a altura geoidal, ou seja, $H^O - H^N = \zeta - N$, está em avaliar o valor da gravidade média ao longo da linha de força conforme mostra a relação (45).

Na relação (45) o termo $\bar{g} - \bar{\gamma}$ é aproximadamente igual à anomalia de gravidade

Bouguer⁶ Δg_B , sendo assim:

$$N - \zeta \approx \frac{\Delta g_B}{\bar{\gamma}} H^O. \quad (46)$$

Em muitas aplicações pode-se ainda fazer conforme Heiskanen e Moritz (1967, p. 328):

$$(\zeta - N)_{[m]} \approx -\Delta g_{B[gal]} \cdot H^O_{[km]}. \quad (47)$$

De acordo com Heiskanen e Moritz (1967), as anomalias Bouguer são geralmente negativas sobre os continentes, as diferenças $\zeta - N$ são geralmente positivas e sobre os oceanos, naturalmente, tem-se que $\zeta = N$. Sabe-se ainda que as anomalias Bouguer são pouco correlacionadas com a altitude regionalmente, entretanto, localmente o produto da relação (47) é basicamente proporcional à altitude, pois as anomalias Bouguer tendem a ser constantes para os curtos comprimentos de onda.

Segundo Heiskanen e Moritz (1967), as anomalias Bouguer dependem da elevação média para o terreno, decrescendo aproximadamente 0,1 mGal a cada 1 km de elevação média. Assumindo como uma estimativa aproximada, a qual pode ser verificada em um mapa de anomalias Bouguer, pode-se escrever:

$$\Delta g_{B[gal]} \approx -0,1 \bar{H}_{[km]}, \quad (48)$$

obtendo-se então:

$$(\zeta - N)_{[m]} \doteq +0,1 \bar{H}_{[km]} H_{[km]} \quad (49)$$

em que H é a altitude do ponto de interesse e \bar{H} é a altitude média para a área considerada. Esta relação serve somente para dar uma ideia da magnitude. Note-se ainda que o termo $+0,1 \bar{H}_{[km]}$ pode ser determinado através do coeficiente angular da reta que melhor se ajusta à dispersão, com base em uma avaliação prática.

O valor médio da gravidade dado pela (25) é objeto de estudos por vários autores, dentre os quais: Tenzer (2004); seguido por Tenzer et al. (2005); Kingdon et al. (2005); Santos et al. (2006) e Flury e Rummel (2009). O valor médio da gravidade ao longo da linha de força entre o geoide e a superfície terrestre depende da distribuição da densidade das massas topográficas, porém esta informação não é habitualmente disponível.

A abordagem aqui adotada tem como plano de fundo as ideias de Heiskanen e Moritz, que para uma correta redução do valor da gravidade ao geoide precisa-se do gradiente vertical da gravidade, $\partial g / \partial H^O$. Este gradiente vertical é dado por (HEISKANEN; MORITZ, 1967, p. 53):

$$\frac{\partial g}{\partial H^O} = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2, \quad (50)$$

⁶ Consultem Heiskanen e Moritz (1967), capítulo 3 para reduções gravimétricas.

equação geralmente atribuída a Bruns.

A (50) não pode ser diretamente aplicada por não se conhecer a curvatura média J das superfícies equipotenciais do campo de gravidade terrestre. Na (50), ω é a velocidade angular de rotação. Para o segundo termo do lado direito da (50) faz-se a princípio $\rho = 0$, sendo ρ a densidade das massas topográficas. A implicação deste artifício é que não existem massas externas ao geoide. De tal modo que o gradiente vertical é definido ser ar-livre. De acordo com Heiskanen e Moritz (1967) é possível então decompor a equação (50) em uma parte relativa à Terra normal e uma parte anômala:

$$\frac{\partial g}{\partial H^O} = \frac{\partial \gamma}{\partial H^O} + \frac{\partial \Delta g}{\partial H^O}. \quad (51)$$

Existem muitas maneiras de se calcular o gradiente normal $\partial \gamma / \partial H^O$. Aqui se optou pelo uso da equação (2-121) fornecida em Heiskanen e Moritz (1967, p. 78):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial H} = -\frac{2\gamma}{a} (1 + f + m - 2\sin^2 \varphi). \quad (52)$$

Todas as constantes físicas e geométricas para o elipsoide de referência são conhecidas e podem ser encontradas em Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006, seção 2.11, p. 83). A parte anômala, $\partial \Delta g / \partial H^O$, pode ser determinada empregando-se a derivada radial denominada de fórmula gradiente (HEISKANEN; MORITZ, 1967):

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial r} \right)_P = -2 \frac{\Delta g_P}{R} + \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\Delta g - \Delta g_P}{\ell_0^3} d\sigma. \quad (53)$$

Nesta equação, Δg_P refere-se ao ponto fixo P , o ponto onde se deseja avaliar o gradiente $\partial \Delta g / \partial H^O$, ℓ_0 é a distância Euclidiana entre o ponto fixo P e o elemento de superfície variável $R^2 d\sigma$, conforme a Figura 7, e expresso em termos de distância angular ψ por:

$$\ell_0 = 2R \sin \frac{\psi}{2} \quad (54)$$

com

$$\psi = \arccos [\sin \varphi_P \sin \varphi + \cos \varphi_P \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_P)]. \quad (55)$$

A integral (53) deve ser dividida em duas partes, zona próxima (i) e zona distante (e) ao ponto de cálculo, para evitar a singularidade quando $\psi \rightarrow 0$ (HEISKANEN; MORITZ, 1967, p. 121):

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial r} \right)_P = -2 \frac{\Delta g_P}{R} + \frac{R^2}{2\pi} \int_0^{\sigma_0} \frac{\Delta g - \Delta g_P}{\ell_0^3} d\sigma + \frac{R^2}{2\pi} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{\Delta g - \Delta g_P}{\ell_0^3} d\sigma, \quad (56)$$

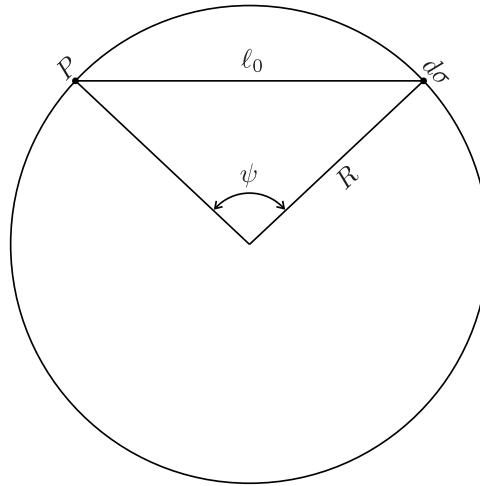


Figura 7 - A distância angular e espacial entre dois pontos sobre a esfera

Fonte: O autor

sendo

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial r}\right)_P = -2\frac{\Delta g_P}{R} + \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial r}\right)_i + \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial r}\right)_e. \quad (57)$$

Segundo Heiskanen e Moritz (1967, p. 122), o efeito da zona em volta do ponto de cálculo, ψ_0 , é dado por:

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial r}\right)_i = \frac{s_0}{4} (g_{xx} + g_{yy}). \quad (58)$$

Em que o raio ψ_0 corresponde a uma distância linear em poucos quilômetros, pode-se então tratar a calota esférica como um plano $s_0 \approx R\psi_0$ em torno do ponto de cálculo; e com

$$g_{xx} = \left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial x^2}\right)_P, \quad g_{yy} = \left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial y^2}\right)_P. \quad (59)$$

De acordo com Heiskanen e Moritz (1967) os valores para g_{xx} e g_{yy} podem ser encontrados, por exemplo, ajustando-se um polinômio para x e y , para a anomalia de gravidade na vizinhança do ponto de cálculo P . Em seguida determina-se a segunda derivada deste polinômio, que é uma função para as anomalias de gravidade.

Uma operação simples pode ser desenvolvida em termos de uma malha fazendo-se:

$$g_{xx} \approx \frac{\Delta g_E - 2\Delta g_P + \Delta g_W}{\Delta x^2}, \quad (60)$$

e

$$g_{yy} \approx \frac{\Delta g_N - 2\Delta g_P + \Delta g_S}{\Delta y^2}. \quad (61)$$

Em que Δg_E e Δg_W são as anomalias de gravidade a leste e a oeste, respectivamente, do ponto de cálculo Δg_P . E, semelhantemente, tem-se para Δg_N e Δg_S que são as anomalias

de gravidade a norte e a sul. Considerando que os dados são organizados em forma de malha com $\Delta\varphi \Rightarrow \Delta y$ e $\Delta\lambda \Rightarrow \Delta x$ a (58) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial r}\right)_i = (g_{xx} + g_{yy}) \sqrt{\frac{\Delta x \Delta y}{16\pi}}. \quad (62)$$

Outra estratégia de como resolver integrais singulares em Geodésia Física com base no domínio das frequências pode ser encontrada em Zhang, Bian e Shen (1995).

No lado direito, o terceiro termo da integral (56) pode ser avaliado, por exemplo, com a quadratura de Gauss-Legendre, na seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial r}\right)_e = \frac{1}{16\pi R} \int_{\lambda} \int_{\varphi} \frac{\Delta g - \Delta g_P}{\sin^3 \frac{\psi}{2}} \cos \varphi d\varphi d\lambda. \quad (63)$$

Pode-se ainda escrever

$$\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial r}\right)_e = \frac{1}{16\pi R} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \left(\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} f(t, \lambda) d\lambda \right) d\varphi. \quad (64)$$

Estendendo a quadratura de Gauss-Legendre em duas variáveis chega-se a:

$$\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial r}\right)_e = \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} H_i \left[\sum_{j=1}^{n_{\lambda}} H_j f(\varphi_i, \lambda_j) \right]. \quad (65)$$

Em que H_i e H_j são os coeficientes de ponderação; e φ_i e λ_j são coordenadas dos nós ao longo de meridianos e paralelos para o domínio $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ e $[\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$; n_{φ} e n_{λ} são pontos nas direções φ e λ , respectivamente. Detalhes sobre a integração empregando-se a quadratura de Gauss podem ser encontrados, por exemplo, em Gerald (1978) e, aspecto computacional pode ser encontrado em Pressand et al. (1992).

A Figura 8 mostra o resultado para a equação (51). Para o gradiente vertical da gravidade encontrou-se valores a partir de $-0,40 \frac{\text{mGal}}{\text{m}}$ a $-0,16 \frac{\text{mGal}}{\text{m}}$, valores estes diferentes do gradiente ar-livre comumente empregado para as reduções gravimétricas $-0,3086 \frac{\text{mGal}}{\text{m}}$, este valor desconsidera, por exemplo, a variação $\partial\gamma/\partial h$ com a latitude. Para o gradiente Prey, usando uma densidade constante de $\rho = 2,67 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, tem-se uma variação de $-0,1862 \frac{\text{mGal}}{\text{m}}$ a $-0,0638 \frac{\text{mGal}}{\text{m}}$, comparado com o valor padrão de $-0,0848 \frac{\text{mGal}}{\text{m}}$.

A gravidade média ao longo da linha de força pode ser avaliada da seguinte maneira:

$$\bar{g} = g - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial H^O} + 4\pi G\rho \right) H^O. \quad (66)$$

Note a inclusão da densidade das massas topográficas ρ na (66). Na equação (66) pode-se notar um termo que se relaciona com o efeito gravitacional do platô de Bouguer $2\pi k\rho H^O$.

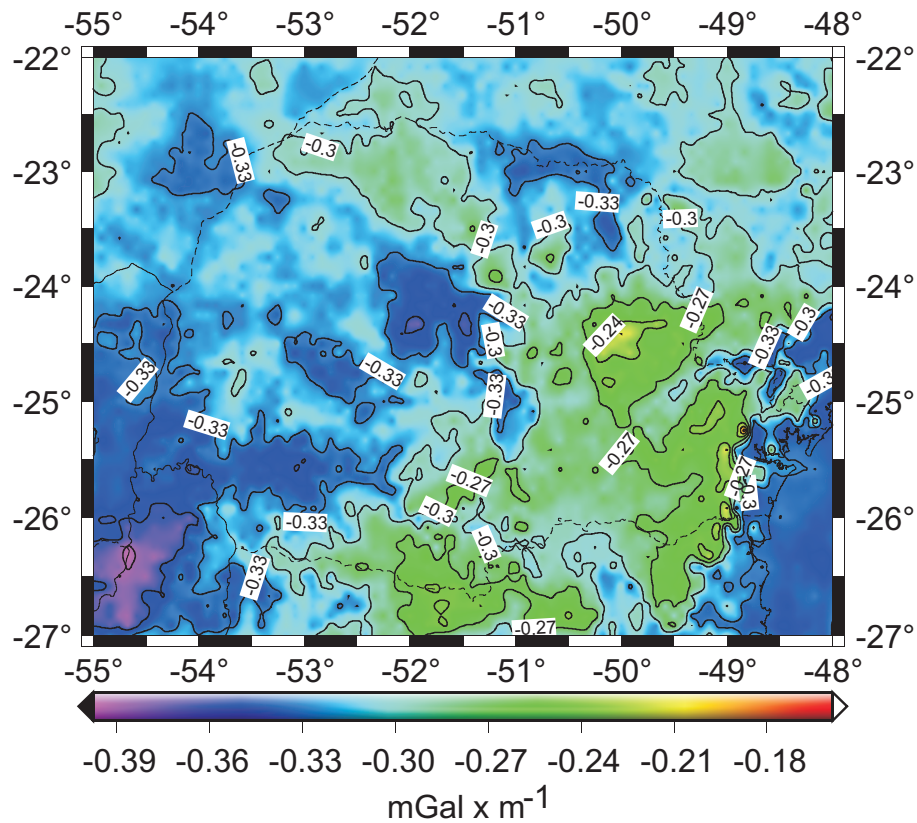


Figura 8 - Gradiente vertical ar-livre da gravidade para o estado do Paraná
Fonte: O autor

A equação (66) é a redução de Poincarè-Prey em sua forma completa sem aproximações (HEISKANEN; MORITZ, 1967, p. 164). A equação (66) pode ser encontrada em Sjöberg (1995, p. 188) destinada à mesma finalidade que a aqui proposta, porém o método é falho pois pressupõe que a gravidade média ocorre na metade de H^O .

Como sugerido por Heiskanen e Moritz (1967), procedeu-se à estimativa do erro no valor médio da gravidade a partir da incerteza no valor da densidade das massas topográficas. O objetivo é responder a seguinte questão: Quanto erro uma diferença em densidade pode causar na separação $(\zeta - N)$? Aplicando a equação (66) na (45) e derivando a equação resultante em relação à ρ tem-se:

$$\delta H = -\frac{2\pi G(H^O)^2 \delta \rho}{\bar{\gamma}}, \quad (67)$$

considerando uma densidade anômala para as massas topográficas de $\delta \rho = \pm 0,6 \text{ gcm}^{-3}$, para a região em relação ao valor padrão $\rho_0 = 2,67 \text{ gcm}^{-3}$, para uma altitude de 1.300 metros comete-se um erro de aproximadamente $\pm 4,3 \text{ cm}$ na separação geóide quase geóide $(\zeta - N)$ dado pela relação (45). Entende-se aqui como densidade anômala $\rho(\varphi, \lambda, h) =$

$$\rho_0 + \delta\rho(\varphi, \lambda, h).$$

2.2 PROBLEMAS DE VALORES DE CONTORNO

2.2.1 Da Teoria do Potencial

Em Kellogg (1929, p. 156) nota-se que a segunda derivada parcial do potencial Newtoniano, V , satisfaz a seguinte equação diferencial, conhecida como equação de Poisson:

$$\Delta V = -4\pi G\rho. \quad (68)$$

Em que Δ é o Operador de Laplace (Laplaciano). A equação de Poisson é válida em todos os lugares em que a densidade das massas, ρ , satisfaz certas condições similares à continuidade (Condição de Hölder), pormenores consultem Kellogg (1929, pp. 152-153).

Um caso especial da (68) aplicado para todos os pontos onde a densidade é igual a zero (*i.e.*, no espaço); então a equação de Poisson torna-se a equação de Laplace:

$$\Delta V = 0. \quad (69)$$

A solução para a equação de Laplace, isto é, funções que satisfazem a equação de Laplace, são conhecidas como funções harmônicas. Em coordenadas cartesianas (FIGURA 9) a equação de Laplace é dada como:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad (70)$$

em coordenadas esféricas (FIGURA 9):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (71)$$

Segundo Kellogg (1929) existem três problemas conhecidos de valor de contorno da teoria do potencial, a saber:

- O primeiro problema de valor de contorno da Teoria do Potencial, ou o problema de Dirichlet é descrito como segue: Dada uma função arbitrária sobre S , determinar uma função V a qual é harmônica interna ou externa a superfície S , e a qual assume sobre S os valores para a referida função.
- O segundo problema de valor de contorno da Teoria do Potencial, ou o problema de Neumann é enunciado como segue: A derivada normal $\partial V / \partial n$ é dada sobre a superfície S como função de V .

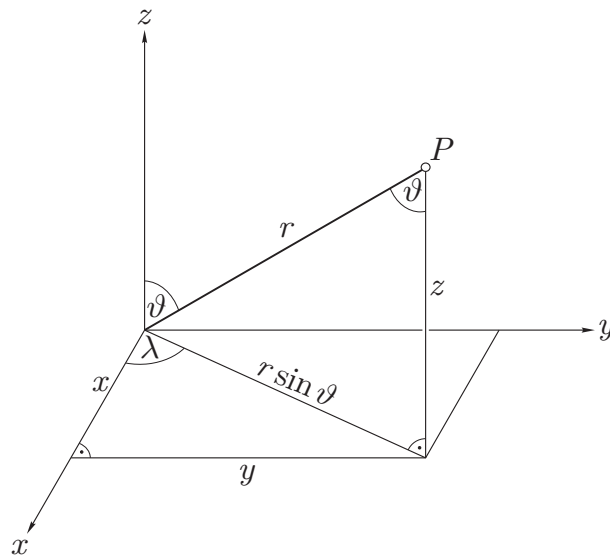


Figura 9 - Coordenadas retangulares e esféricas
Fonte: Heiskanen e Moritz (1967)

- O terceiro problema de valor de contorno da Teoria do Potencial, ou o problema de Robin, é enunciado na forma: A combinação linear para V e para a sua derivada normal é fornecido sobre S e $\partial/\partial h$ significa a derivada ao longo da normal.

Ao invés de procurar uma função harmônica no exterior de S pode-se procurar também uma função harmônica no interior de S que satisfaça as condições de contorno prescritas. No entanto, estes casos tem menos afinidade com o problema da Geodésia Física.

2.2.2 Da Geodésia Física

Segundo Torge (2001), o problema da Geodésia Física é o de determinar a figura e o campo da gravidade externo da Terra como funcionais do tempo, bem como, determinar o elipsoide médio da Terra a partir de parâmetros observados sobre e no exterior da superfície terrestre. Se a distribuição de densidade da Terra no interior e o contorno do volume forem conhecidos, o problema de determinar o potencial do campo gravitacional é resolvido pela integral de volume:

$$V_P = G \iiint_V \frac{\rho}{\ell} d\nu. \quad (72)$$

Naturalmente não se tem acesso a estas informações, ao menos não a densidade, com suficiente detalhe. Muito embora existam modelos de densidade como o PREM, *The Preliminary Reference Earth Model* (DZIEWONSKI; ANDERSON, 1981), que representa a densidade

radial e não modela em detalhe as heterogeneidades de densidades laterais.

Formalmente, a (69) representa a equação diferencial parcial de V , que solucionada fornece o potencial gravitacional externo da Terra através da Teoria do Potencial. Como qualquer equação diferencial, uma solução completa é obtida somente com a aplicação das condições de contorno. Do ponto de vista da Geodésia, o contorno é a superfície terrestre e o seu exterior é onde a (69) é válida (a atmosfera e outros corpos celestes são negligenciados para o momento).

Segundo Moritz (1965), a determinação da figura da Terra a partir de medidas da gravidade, em um sentido, também é um problema de valor de contorno, porque a gravidade é medida sobre a superfície terrestre. Entretanto, este não é um dos três problemas da Teoria do Potencial já mencionados. O potencial da gravidade W não é harmônico, porque ele contém a influência da força centrífuga; mas isto é facilmente resolvido. O principal ponto é que a superfície S é desconhecida, enquanto no habitual problema de valor de contorno S é fornecida.

2.2.2.1 Identidades de Green

O Teorema de Green e fórmulas integrais relacionadas são equações básicas da Teoria do Potencial sendo indispensáveis ferramentas para certos problemas da Geodésia teórica. Iniciando com a fórmula integral de Gauss:

$$\iiint_{\nu} \operatorname{div} \vec{F} d\nu = \iint_S F_n dS. \quad (73)$$

Em que \vec{F} é uma função vetorial arbitrária (diferenciável) e $F_n = \vec{n} \cdot \vec{F}$ é a componente de \vec{F} ao longo do vetor unitário \vec{n} para o exterior. A (73) aplica-se a funções vetoriais que têm a primeira derivada contínua, seja U e V duas funções escalares com segundas derivadas contínuas, e considere a função vetorial $\vec{F} = \vec{U} \nabla \vec{V}$. Então, desde já $\vec{n} \cdot \nabla = \partial/\partial n$, e

$$\nabla \cdot (U \nabla V) = \nabla U \cdot \nabla V + U \Delta V. \quad (74)$$

Pode-se aplicar o teorema da divergência de Gauss para obter a primeira identidade de Green:

$$\iiint_{\nu} (\nabla U \cdot \nabla V + U \Delta V) d\nu = \iint_S U \frac{\partial V}{\partial n} dS. \quad (75)$$

Invertendo os papéis de U e V na (75), obtém-se uma fórmula similar, a qual, subtraída da (75) fornece a segunda identidade de Green:

$$\iiint_{\nu} (U\Delta V - V\Delta U) d\nu = \iint_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS. \quad (76)$$

Sendo válida para qualquer U e V com derivadas de segunda ordem contínuas.

De grande importância é o caso em que:

$$U = \frac{1}{\ell}, \quad (77)$$

sendo ℓ a distância usual entre o ponto de cálculo e o ponto de integração. Supondo que o volume ν é o espaço exterior da Terra (*i.e.*, o teorema da divergência de Gauss aplica-se a qualquer volume, e não somente a volumes contendo uma distribuição de massa) conforme a Figura 10.

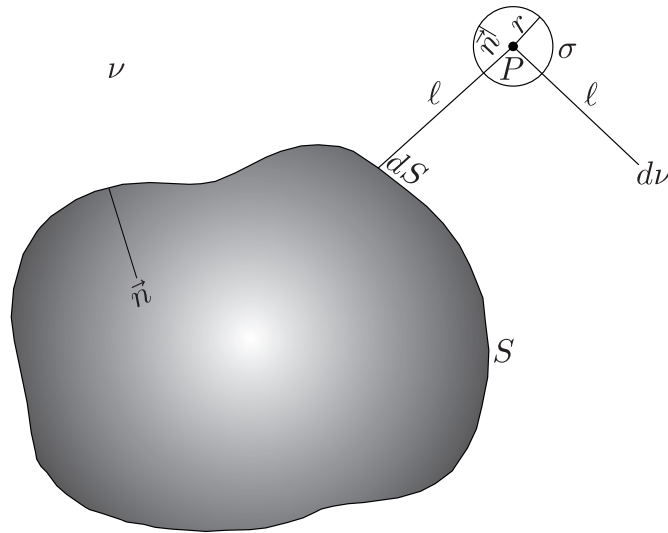


Figura 10 - Geometria para o caso especial da terceira identidade de Green

Fonte: Adaptado de Jekeli (2007)

Considere um ponto P dentro do volume (espaço livre) que é limitado pela superfície S , P encontra-se no exterior da superfície terrestre e considere ainda que V atende a (66), a partir do volume ν , excluído o volume limitado por uma pequena esfera σ , centrada em P , esta esfera torna-se parte da superfície que limita o volume ν ; então, U é um ponto massa potencial, $\Delta U = 0$ em todos os lugares em ν (exceto para o interior da pequena esfera, em torno do ponto P) a segunda identidade fornece:

$$\iint_S \left[\frac{1}{\ell} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) \right] dS + \iint_{\sigma} \left[\frac{1}{\ell} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) \right] d\sigma = 0. \quad (78)$$

Para a segunda integral em (78) pode-se escrever $d\sigma = r^2 d\Omega$, em que Ω é o ângulo sólido 4π . O vetor unitário \vec{n} , representa a perpendicular apontando contrário a ν . Sobre a pequena esfera, \vec{n} tem a direção oposta para $\ell = r$, e a segunda integral torna-se:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + V \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\sigma &= - \iint_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} r^2 d\Omega - \iint_{\Omega} V d\Omega \\ &= - \iint_{\Omega} \frac{\partial V}{\partial r} r d\Omega - 4\pi \bar{V} \end{aligned} \quad (79)$$

em que \bar{V} é o valor médio de V sobre σ . No limite em que o raio da esfera tende a zero, o lado direito da (79) tende a $0 - 4\pi V_P$ que segundo Kellogg (1929, p. 219) a (78) fornece:

$$V_P = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{1}{\ell} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) \right] dS, \quad (80)$$

seguindo os mesmos passos encontrados em Courant e Hilbert (1989, pp. 252-258), é possível mostrar que se P encontra-se sobre a superfície S chega-se a:

$$V_P = \frac{1}{2\pi} \iint_S \left[\frac{1}{\ell} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) \right] dS. \quad (81)$$

2.2.2.2 Existência e unicidade

Segundo (JEKELI, 2007) usando as identidades de Green podem-se provar os seguintes teoremas para o problema exterior; resultados similares são válidos para o problema interior.

Teorema 1 *Se V é harmônica (continuamente diferenciável) em uma região fechada ν , e se V é igual a zero em todos os lugares sobre o contorno S , então V também será igual a zero em todos os lugares na região ν .*

Demonstração 1 *A partir de $V = 0$ sobre S , a primeira identidade de Green (75) com $U = V$ fornece:*

$$\iiint_{\nu} (\nabla V)^2 d\nu = \iint_S V \frac{\partial V}{\partial n} dS = 0$$

Teorema 2 *Se V é harmônica (continuamente diferenciável) em uma região fechada ν , então V é univocamente determinada em ν pelos seus valores sobre o contorno S .*

Teorema 3 *Se V é harmônica (continuamente diferenciável) na região exterior a ν , com contorno fechado S , então V é univocamente determinada pelos valores de sua derivada normal sobre S .*

Teorema 4 *Supondo V harmônica (continuamente diferenciável) na região fechada ν , com contorno S , e supondo os valores de contorno dados como:*

$$g = \alpha V|_S + \beta \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_S$$

então V é univocamente determinada por estes valores se $\alpha/\beta > 0$.

A solução para o problema de Robin é única somente em certos casos. O problema mais comum na Geodésia Física é determinar o distúrbio do potencial T a partir de anomalias de gravidade Δg sobre o geoide. Considere T fora do geoide, a segunda equação (87) fornece uma aproximação a partir da condição de contorno, mostrando que este é o Problema de Robin. Neste caso, encontra-se que $\alpha = -2/r$, e, recordando que, quando ν é o espaço exterior em que o vetor unitário n aponta de fora para dentro das massas, isto é, $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$ tem-se $\beta = 1$. Por conseguinte, a condição do teorema 4 α/β não é satisfeita e a unicidade não é garantida.

2.2.2.3 Aplicação da identidade de Green

A determinação do campo da gravidade externo da Terra a partir de observações terrestres é relacionada com a formulação do PVCG com respeito à equação diferencial de Laplace. Estes aspectos remetem à formulação do PVCG, como pode ser entendido, de forma geral, como a determinação de uma função harmônica no exterior de uma superfície de contorno S , a partir de certos funcionais (anomalias de gravidade, distúrbios de gravidade, diferenças de potencial etc) resultando na equação integral (HEISKANEN; MORITZ, 1967):

$$-2\pi T + \iint_S \left[T \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\ell} \frac{\partial T}{\partial n} \right] dS = 0. \quad (82)$$

Esta é a solução para a equação de Laplace para T na forma integral, conforme a terceira identidade de Green para P sobre S . ℓ é a distância entre o ponto de cálculo e o ponto de integração, sendo n normal a superfície S .

A linearização da (82) requer uma superfície de referência que serve como uma aproximação da superfície de contorno S . Se S é o geoide, esta aproximação será o elipsoide (Stokes). Se S é a superfície terrestre, esta aproximação será o teluroide, ou a superfície Σ , composta de todos os pontos Q mostrados na Figura 4 (MOLODENSKII; EREMEEV; YURKINA, 1962). As abordagens de Stokes e Molodenskii são métodos clássicos para a determinação gravimétrica do geoide ou quase geoide. A teoria de Stokes e de Molodenskii referem-se ao terceiro problema de valor de contorno da Teoria do Potencial. Elas fornecem alturas geoidais e anomalias de altitude a partir de anomalias de gravidade

Δg dadas sobre o geóide e superfície terrestre, respectivamente.

2.2.3 Soluções clássicas para o PVCG

2.2.3.1 O campo de gravidade anômalo

Considere-se inicialmente o vetor gravidade \vec{g}_P para um ponto qualquer P e o vetor gravidade normal $\vec{\gamma}$ para um ponto Q . O vetor anomalia de gravidade $\Delta\vec{g}$ é definido como a diferença entre eles:

$$\Delta\vec{g}_P = \vec{g}_P - \vec{\gamma}_Q. \quad (83)$$

Um vetor é caracterizado por sua magnitude e direção. A diferença em magnitude é a anomalia de gravidade Δg_P :

$$\Delta g_P = g_P - \gamma_Q, \quad (84)$$

que é, de modo indireto, uma observação; e a diferença em direção é a deflexão da vertical.

É possível ainda comparar os vetores \vec{g} e $\vec{\gamma}$ para o mesmo ponto P . Sendo assim, tem-se o vetor distúrbio de gravidade $\delta\vec{g}_P$:

$$\delta\vec{g}_P = \vec{g}_P - \vec{\gamma}_P. \quad (85)$$

Consequentemente, a diferença em magnitude é o distúrbio de gravidade δg_P

$$\delta g_P = g_P - \gamma_P. \quad (86)$$

Segundo Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006), o distúrbio de gravidade é conceitualmente mais simples do que a anomalia de gravidade, porém, no passado, era complicado de se determinar, pois um problema era determinar h . Devido a esta limitação, o mesmo não teve tanta importância na Geodésia. Por mais de 150 anos, anomalias de gravidade foram utilizadas para a determinação do campo gravitacional externo da Terra, assim, o PVCG livre teve de ser formulado, que após linearização é relacionado com as anomalias de gravidade.

A relação entre anomalia de gravidade (84) e distúrbio do potencial (5), após a linearização é dada por:

$$-\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T = \Delta g, \quad (87)$$

e entre o distúrbio de gravidade (86) e o distúrbio de potencial (5) é dado por:

$$-\frac{\partial T}{\partial h} \Big|_S = \delta g. \quad (88)$$

A (87) tem sido chamada de Equação Fundamental da Geodésica Física porque relaciona

a quantidade medida Δg com o desconhecido distúrbio do potencial T . Hoje em dia, a (88) merece esse título, substituindo a (87), conforme observaram Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006, p. 95).

2.2.3.2 A integral de Stokes

De acordo com a teoria de Stokes, Stokes (1849), o problema de determinação do geoide é formulado como um problema de valor de contorno para a Teoria do Potencial. O distúrbio do potencial pode ser dado pela solução da equação (82) (HEISKANEN; MORITZ, 1967):

$$T - \frac{1}{2\pi} \iint_E \left[\frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{1}{\ell} \right] T dE = \frac{1}{2\pi} \iint_E \frac{\Delta g}{\ell} dE. \quad (89)$$

Para a equação (89) tem-se (HEISKANEN; MORITZ, 1967):

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma, \quad (90)$$

onde R é o raio médio terrestre, ψ é a distância angular geocêntrica, Δg é a anomalia de gravidade, $d\sigma$ é um elemento infinitesimal de área para a esfera unitária σ e $S(\psi)$ a função de Stokes (HEISKANEN; MORITZ, 1967):

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi \ln \left[\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right]. \quad (91)$$

2.2.3.3 A integral de Molodenskii

De acordo com Molodenskii, Eremeev e Yurkina (1962), a equação (82) é linearizada usando-se o teluróide Σ . O ponto essencial, entretanto, é que para a equação (82) a integração sobre a superfície desconhecida S pode ser substituída por uma integração sobre a superfície conhecida Σ . A avaliação $\frac{\partial T}{\partial n}$ proposta por Molodenskii é um pouco afanosa. Aqui se segue a solução mais conveniente encontrada em Heiskanen e Moritz (1967, p. 298):

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \left[-\Delta g + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T + \gamma (\xi \tan \beta_1 + \eta \tan \beta_2) \right] \cos \beta, \quad (92)$$

onde $\tan \beta_1 = \frac{\partial h}{\partial x}$, $\tan \beta_2 = \frac{\partial h}{\partial y}$, e $\tan^2 \beta = \tan^2 \beta_1 + \tan^2 \beta_2$. β_1 é o ângulo de inclinação para um perfil do terreno na direção norte - sul com relação ao horizonte, de forma similar, β_2 é a inclinação para um perfil este - oeste, β é o ângulo de inclinação máxima do terreno. ξ componente meridiana e η componente primeiro vertical do desvio da vertical.

Em aproximação esférica e limitando os termos da série para os seus dois primei-

ros termos, o distúrbio do potencial é dado por (HEISKANEN e MORITZ, 1967):

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} (G_0 + G_1 + \dots) S(\psi) d\sigma, \quad (93)$$

onde $S(\psi)$ é a função esférica de Stokes (91) para o argumento ψ . O principal termo corresponde à fórmula de Stokes aplicada às anomalias de gravidade sobre a superfície terrestre é:

$$G_0 = \Delta g. \quad (94)$$

O termo G_1 , em suficiente aproximação, é dado por (HEISKANEN; MORITZ, 1967):

$$G_1 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{H^N - H_P^N}{\ell_0^3} \left(\Delta g + \frac{3\gamma}{2R} \zeta_0 \right) d\sigma. \quad (95)$$

Em que H_P^N e H^N são as altitudes normais para o ponto de cálculo e o ponto de integração, γ é a gravidade normal calculada para o teluroide e ζ_0 é a anomalia de altitude aproximada calculada a partir de G_0 . Uma aproximação, usualmente suficiente para a (95) é dada por:

$$G_1 \approx \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{H^N - H_P^N}{\ell_0^3} \Delta g d\sigma. \quad (96)$$

Note que G_1 na equação (96) depende somente da inclinação do terreno e da anomalia de gravidade. À distância ℓ_0 foi definida anteriormente pela equação (54). Finalmente tem-se para o distúrbio do potencial:

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g d\sigma + \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S(\psi) G_1 d\sigma. \quad (97)$$

De acordo com Torge (2001), assumindo uma correlação linear entre anomalias da gravidade com a altitude, o termo G_1 (96) pode ser aproximado pela correção de terreno ct . Para maiores detalhes sugerem-se Moritz (1968) e Sideris (1990). A correção de terreno (ct), considerando somente o termo linear em expansão em série de Taylor e em aproximação planar, é dada por:

$$ct = \frac{1}{2} k\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(H - H_P)^2}{[(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2]^{\frac{3}{2}}} dx dy. \quad (98)$$

A exclusão da topografia no contexto da teoria de Molodenskii remonta a Pellinen (1962) e Moritz (1969). Segundo estes autores, uma considerável melhora para a convergência das séries de Molodenskii é esperada se as massas topográficas forem removidas, neste caso, fazendo-se o uso da redução completa de Bouguer. Neste contexto, a topogra-

fia é removida e depois restaurada. Em Moritz (1969, capítulo 7) são apresentados todos os pormenores. Apresenta-se aqui somente as equações necessárias:

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} (\Delta g + ct) S(\psi) d\sigma + \sum_{i=1}^n \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \bar{G}_n S(\psi) d\sigma + \delta T. \quad (99)$$

Neste caso, os termos \bar{G}_n podem ser calculados com as anomalias Bouguer:

$$\Delta g_B = \Delta g + 2\pi k \rho H + ct, \quad (100)$$

sendo:

$$\bar{G}_n = D_n (\Delta g_B). \quad (101)$$

Em que D_n é o operador *Downward continuation*, que será discutido na seção 2.3.

A modificação desta solução, considerando efeitos topográficos pode ser de uso prático, porém faz-se necessário o emprego da correção δT dada por (MORITZ, 1969):

$$\delta T = G\rho R^2 \iint_{\sigma} \left[\ln \left(\frac{\ell_1 + H + H_A}{\ell_0} \right) - \frac{H + H_A}{\ell_0} \right] d\sigma. \quad (102)$$

em que ℓ_1 é dado por:

$$\ell_1 = \sqrt{\ell_0^2 + (h - h_P)^2}. \quad (103)$$

Em seguida, o termo \bar{G}_1 deve ser determinado a partir de anomalias de gravidade Bouguer e, portanto, serão menores e mais suaves.

2.2.3.4 A integral de Hotine

Como uma alternativa ao uso das anomalias de gravidade, na denominada integral de Hotine, os distúrbios de gravidade são empregados (HOTINE, 1969):

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \delta g H(\psi) d\sigma. \quad (104)$$

Todas as derivações, implementações, e modificações são similares à integral de Stokes. O núcleo $H(\psi)$ é dado por (HOTINE, 1969, p. 311):

$$H(\psi) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} - \ln \left[1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right], \quad (105)$$

esta representa o distúrbio do potencial externamente a esfera usando distúrbios de gravidade sobre a esfera.

Para a abordagem de Hotine é necessário o conhecimento do distúrbio de gra-

vidade sobre o geoide. Neste caso, faz-se necessário valores da gravidade associados a altitudes ortométricas e alturas geoidais, ou altitudes elipsoidais, em outras palavras $(\varphi, \lambda, h, H^O, g)$ ou $(\varphi, \lambda, h, N, g)$. Apontam-se aqui algumas alternativas, a saber:

- Segundo Vaníček, Changyou e Sjöberg (1992):

$$\delta g_g = g_g - \gamma_g, \quad (106)$$

e

$$\Delta g_g = g_g - \gamma_e, \quad (107)$$

pode-se ainda:

$$\gamma_g = \gamma_e - \frac{2\gamma_e N}{R}. \quad (108)$$

Sendo os índices g e e referentes à superfícies do geoide e elipsoide respectivamente. Tem-se então, empregando a (108) na (106) e o resultado aplicado na (104):

$$N_{i+1} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} H(\psi) \Delta g d\sigma + \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} H(\psi) N_i d\sigma. \quad (109)$$

Sendo a solução iterativa em termos de $N \forall i = 0, 1, \dots, n$.

- Empregar a solução para o PVCG usando o distúrbio de gravidade sobre o elipsoide como condição de contorno, e o elipsoide como superfície de contorno, dados de entrada (φ, λ, h, g) não sendo necessário o conhecimento do geoide *a priori*;
- Na falta de observações GPS e o conhecimento de um modelo geoidal *a priori*, $(\varphi, \lambda, H, N, g)$, usa-se:

$$\delta g_g = \Delta g_g - \frac{\partial \gamma}{\partial h} N, \quad (110)$$

e

$$N_{i+1} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} H(\psi) \Delta g d\sigma - \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} H(\psi) N_i d\sigma. \quad (111)$$

Solução também de forma iterativa e $\frac{\partial \gamma}{\partial h}$ é dado pela (52).

Note que de qualquer forma faz-se necessário a redução do valor da gravidade para o geoide, ou o elipsoide. Alternativa interessante é empregar a solução de Molodenskii mesclada com a de Hotine, ou seja, distúrbio de gravidade sobre a superfície terrestre, o que é mais natural, veja por exemplo: Fei (2000); Mojzeš e Valko (2010).

2.3 CONTINUAÇÃO ANALÍTICA

A continuação analítica vem da teoria de variáveis complexas e significa estender o domínio de uma dada função analítica, também conhecida como extensão analítica e em

Kellogg (1929, p. 259) como continuação harmônica. Uma extensão analítica no geral tem êxito em definir valores adicionais da função, por exemplo, em uma região nova na que uma representação mediante séries infinitas com a que se havia definido inicialmente a função como divergente. Porém, a continuação analítica no contexto desta tese, para alguns pontos é matematicamente singular, o que torna do ponto de vista teórico inapropriado o uso desta importante ferramenta.

O uso da continuação analítica pode ser questionado, pois a continuação analítica do potencial externo para o interior das massas atrativas é conhecido por ser singular. Entretanto, mostra-se que o uso destas séries de uma maneira puramente formal, o resultado se justifica, mostrando sua equivalência com as séries de Molodenskii. (MORITZ, 1970).

Segundo Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006) a continuação analítica é rigorosamente possível para dados discretos sobre a superfície de contorno e aproximadamente possível para dados contínuos. Este argumento encontra raízes na modificação do Teorema de Runge por Krarup (1969), as ideias básicas são apresentadas na sequência.

2.3.1 O Teorema de Runge

O Teorema de Runge desempenha um papel importante na Topologia, Análise Complexa, e entre outros ramos da Matemática Pura, este teorema enuncia-se como segue:

Teorema 5 *Seja K um conjunto compacto e Γ e Ω conjuntos abertos em \mathbb{R}^3 , tal que seus limites são homeomorfos a uma esfera e de tal forma que $K \in \Gamma$ e $\Gamma \in \Omega$. Se a função ϕ é harmônica em Γ e se $\varepsilon > 0$ é arbitrariamente pequeno, então existe uma função ψ , harmônica em Ω , tal que:*

$$|\phi - \psi| < \varepsilon$$

uniformemente em K .

Em uma primeira vista, este teorema não parece ter relevância para a Geodésia. No entanto, o teorema de Runge detém também que as regiões K , Γ e Ω são exteriores de suas respectivas superfícies de contorno (∂K , $\partial \Gamma$ e $\partial \Omega$, respectivamente). Neste caso, o Teorema de Runge passa a ter uma relevante importância para a Geodésia. Pode-se identificar Γ com o exterior da superfície terrestre, Ω com o exterior de alguma esfera que esteja completamente envolvida pela Terra (também conhecida como esfera de Bjerhammar), e K com o exterior de alguma superfície, envolvendo completamente a superfície terrestre (de forma mais rigorosa, K é o exterior além da superfície de contorno já que K é um conjunto fechado, não mais compacto uma vez que é ilimitado). Neste sentido,

segundo Moritz (1980) tem-se a versão do Teorema de Runge para a Geodésia, o qual se denomina: Teorema de Runge-Krarup, cf. Krarup (1969). O Teorema de Runge-Krarup é dado como:

Teorema 6 *Qualquer função harmônica ϕ , regular no exterior da superfície terrestre, pode ser uniformemente aproximada por funções harmônicas ψ regulares no exterior de uma dada arbitrariamente esfera dentro da Terra, no sentido de que para um dado $\varepsilon > 0$, a relação:*

$$|\phi - \psi| < \varepsilon$$

é válida para todos os lugares fora e sobre qualquer superfície fechada que envolva a superfície terrestre completamente.

Se a superfície terrestre é suficientemente regular (e.g., continuamente diferenciável), a superfície ∂K pode ser considerada como coincidente com $\partial \Gamma$, neste caso, tem-se o Teorema de Keldysh-Lavrentiev (BJERHAMMAR, 1975):

Teorema 7 *Qualquer função ϕ , harmônica no exterior da superfície terrestre e contínua sobre e em seu exterior, pode ser uniformemente aproximada por funções harmônicas ψ regulares no exterior de uma dada arbitrariamente esfera dentro da Terra, no sentido de que para qualquer dado $\varepsilon > 0$, a relação:*

$$|\phi - \psi| < \varepsilon$$

é válida para todos os lugares sobre a superfície terrestre.

Em Fei (2000) é apresentado uma melhoria dos teoremas 6 e 7 introduzindo-se a noção de uma figura denominada de “superfície em estrela”, o teorema se enuncia como:

Teorema 8 *Para um ponto O dentro de S_E , dado um arbitrário inteiro positivo N , uma “superfície em estrela” S_0 envolvendo completamente S_E e um arbitrário positivo ε , existe uma função T , harmônica em todos os lugares exceto em O , tal que:*

$$\|T - \bar{T}\|_{S_0}^N < \varepsilon$$

e

$$\|T - \bar{T}\|_{S_E}^1 < \varepsilon$$

Definição 1 *Para um dado ponto Q em \mathbb{R}^3 , uma superfície fechada S é chamada de “superfície em estrela” para O se O encontra-se dentro de S e existe somente uma interseção Q entre S e o segmento OQ para todo Q sobre S . O conjunto de todas as superfícies em estrela é indicado por $\aleph(O)$.*

De acordo com Heck (1997), parte-se do pressuposto para as condições de contorno de que a superfície de contorno $S = \partial B$ é fechada, em estrela (com respeito à origem) e suficientemente suave e regular. Matematicamente, o grau de suavização é expresso em termos do espaço de Hölder. Exemplo de uma superfície em estrela pode ser visto na Figura 11, a superfície S é uma superfície em estrela para O_2 , mas não para O_1 .

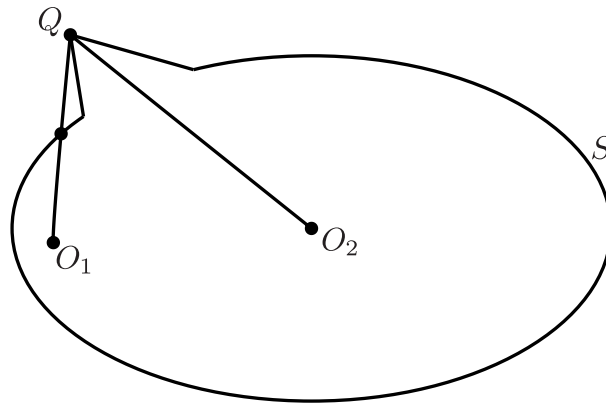


Figura 11 - Um exemplo para uma superfície em estrela
Fonte: Fei (2000)

Neste método, o distúrbio do potencial e o distúrbio de gravidade são analiticamente estendidos a partir de S_E para um ponto na superfície de nível S_P (FIGURA 12).

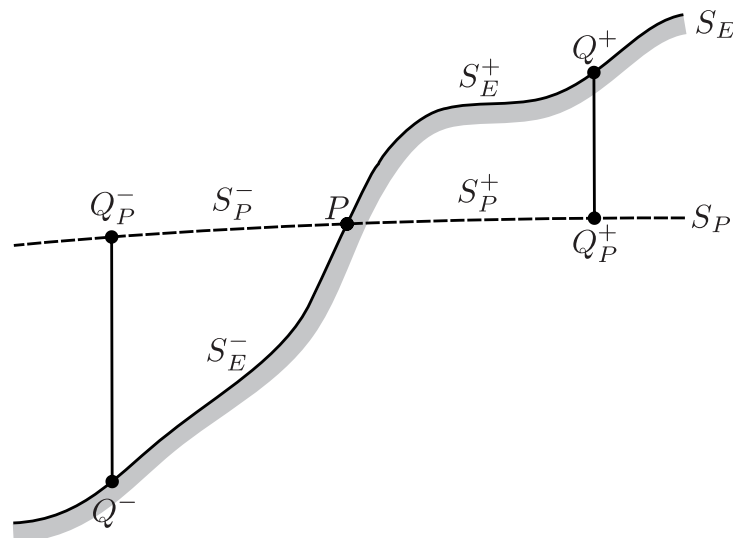


Figura 12 - Superfície terrestre S_E e superfície de nível S_P
Fonte: Adaptado de Fei (2000)

De acordo com o Teorema 8 para uma constante positiva e arbitrariamente pequena ε , um arbitrário inteiro positivo N e uma superfície S_0 suficientemente próxima a S_E , existe uma função \bar{T} satisfazendo:

1. $\bar{T} \in H(O)$
2. $|T_Q - \bar{T}_Q| < \varepsilon$ para Q sobre ou fora de S_E
3. $|\delta g_Q - \delta \bar{g}_Q| < \varepsilon$ para Q sobre ou fora de S_E
4. $|\frac{\partial^n}{\partial z^n} \delta g_Q - \frac{\partial^n}{\partial z^n} \delta \bar{g}_Q| < \varepsilon$ para $0 \leq n \leq N$ e Q sobre ou fora de S_0

Para as condições 3 e 4, quando a distância z_Q para um ponto Q sobre S_E é suficientemente pequena, $\delta \bar{g}$ sobre S_P tem as seguintes relações com δg sobre S_E :

$$\delta g_{Q-} \approx U_{Q-}(\delta g_{Q+}) \approx U_{Q-}(\delta \bar{g}_{Q+}), \quad (112)$$

$$\delta g_{Q+} \approx \delta \bar{g}_{Q+} \approx U_{Q+}(\delta \bar{g}_{Q+}). \quad (113)$$

S_0 é uma superfície em estrela suavizada que envolve completamente a superfície terrestre. Depois de obter $\delta \bar{g}$ a partir de δg resolvendo as condições 1 e 2, pode-se usar δg na fórmula de Hotine, por exemplo, para determinar \bar{T}_P como aproximação para T_P . A continuação descendente é geralmente estabilizada por suavização, ou seja, atenuando os curtos comprimentos de onda do espectro.

2.3.2 Continuação para uma particular superfície de nível

Segundo Moritz (1970) e Moritz (1980) a ideia de continuação analítica baseia-se sobre observações, porque δg é calculado sobre a superfície terrestre (FIGURA 13). De acordo com Moritz (1969), a continuação analítica é um conceito puramente matemático, independente da densidade das massas topográficas.

Uma expansão em série de Taylor, *cf.* Bronshtein et al. (2005, p. 691), do distúrbio de gravidade sobre a superfície terrestre dá imediatamente o distúrbio de gravidade obtido sobre a superfície esferopotencial U_P na forma:

$$\delta g = \delta g' + z \frac{\partial \delta g'}{\partial z} + \frac{1}{2!} z^2 \frac{\partial^2 \delta g'}{\partial z^2} + \frac{1}{3!} z^3 \frac{\partial^3 \delta g'}{\partial z^3} + \dots \quad (114)$$

Em Moritz (1980) é dada a mesma fórmula, porém, em função da anomalia de gravidade. O distúrbio de gravidade e a anomalia de gravidade têm comportamentos analíticos equivalentes (MORITZ, 2000). Empregando uma forma de recorrência para a série

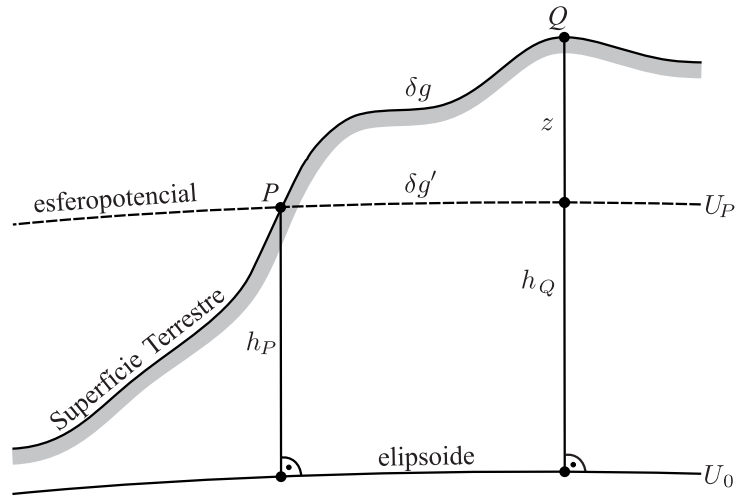


Figura 13 - Continuação analítica a partir da superfície terrestre para a superfície esferopotencial

Fonte: O autor

(114) tem-se:

$$\delta g = \delta g' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \frac{\partial^n \delta g'}{\partial z^n}, \quad (115)$$

em que:

$$z \approx h_Q - h_P, \quad (116)$$

é a diferença de altura com relação ao ponto de cálculo. O sinal de aproximado na (116) é porque as altitudes envolvidas deveriam ser avaliadas ao longo da linha de campo referente à Terra normal. Porém, a altitude elipsoidal h pode ser usada sem prejuízos. $\delta g'$ é o distúrbio de gravidade na superfície de nível relativa à Terra normal passando pelo ponto P . Esta série pode ser escrita simbolicamente como:

$$\delta g = U \delta g', \quad (117)$$

onde o símbolo U denota o operador continuação ascendente⁷, onde é dado na superfície da Terra. Então, $\delta g'$ é dado pela inversão:

$$\delta g' = U^{-1} \delta g = D \delta g, \quad (118)$$

em que D , o operador continuação descendente⁸, é inverso a U . Computacionalmente, é mais conveniente a introdução da função:

$$g_n = D_n (\delta g), \quad (119)$$

⁷ Upward continuation.

⁸ Downward continuation.

que pode ser resolvida por:

$$g_n = - \sum_{r=1}^n z^n L_r (g_{n-r}). \quad (120)$$

A equação (120) faz com que seja possível determinar g_n recursivamente, a partir de

$$g_0 = \delta g. \quad (121)$$

Então, o distúrbio de gravidade $\delta g'$, definido pela equação (118), é dado por

$$\delta g' = D\delta g = \sum_{n=0}^{\infty} D_n (\delta g) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n. \quad (122)$$

2.3.3 Determinação do operador L_n

A derivada vertical $\partial/\partial r$ pode ser expressa em termos de valores de superfície representado pela integral de Poisson (HEISKANEN; MORITZ, 1967, p. 38):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_Q = -\frac{1}{R} f_Q + \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{f - f_Q}{\ell_0^3} d\sigma, \quad (123)$$

Q é o ponto da superfície onde f é calculado ao qual o primeiro termo do lado direito se refere, σ indica a esfera unitária, e ℓ_0 é dada pela equação (67).

A aplicação para δg se faz da seguinte maneira:

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r}, \quad (124)$$

lembrando que

$$-r \frac{\partial T}{\partial r} \Rightarrow \text{é harmônica}, \quad (125)$$

na (123) tem-se:

$$\frac{\partial \left(-r \frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial r} = -\frac{1}{R} \left(-r_P \frac{\partial T_P}{\partial r_P} \right) + \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{-r \frac{\partial T}{\partial r} + r_P \frac{\partial T_P}{\partial r_P}}{\ell_0^3} d\sigma, \quad (126)$$

finalmente

$$r_P \frac{\partial \delta g_P}{\partial r_P} = -\frac{r_P}{R} \delta g_P + \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{r \delta g - r_P \delta g_P}{\ell_0^3} d\sigma. \quad (127)$$

Sendo então, $f = r \cdot \delta g$ (f harmônica no espaço exterior a esfera de raio R e $\Delta f = 0$) na equação (123).

É possível também introduzir o operador linear L e escrevendo a (127) em aproxi-

mação esférica na forma:

$$L(\delta g_P) = -\frac{1}{R}\delta g_P + \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\delta g - \delta g_{PQ}}{\ell_0^3} d\sigma = L_1(\delta g_P). \quad (128)$$

Para a segunda derivada faz-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 2L_2, \quad (129)$$

e o operador linear L_n pode ser avaliado de forma recursiva por:

$$L_n(\delta g) = \frac{1}{n} L_1 [L_{n-1}(\delta g)]. \quad (130)$$

2.3.4 A solução de Molodenskii e o GPS

Uma vez que $\delta g'$ é dada sobre a superfície esferopotencial U_P , T para o ponto P pode ser obtido via a solução de Molodenskii. Em primeira ordem, tem-se:

$$\delta g' = \delta g + g_1. \quad (131)$$

O primeiro termo da série de Molodenskii é dado por:

$$g_1 = -\frac{\partial \delta g}{\partial z}(h - h_P) = -\frac{\partial \delta g}{\partial h}(h - h_P). \quad (132)$$

Quando finalmente chega-se:

$$T = T_0 + T_1, \quad (133)$$

onde

$$T_0 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} H(\psi) \delta g d\sigma, \quad (134)$$

é a fórmula simples de Hotine aplicada ao distúrbio de gravidade ao nível do solo, e a correção de Molodenskii para T é:

$$T_1 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} g_1 H(\psi) d\sigma. \quad (135)$$

Esta é a solução de primeira ordem, ou uma solução linear.

Na verdade, aproximações mais altas podem ser geradas por:

$$\delta g' = \delta g + g_1 + g_2 + g_3 + \dots, \quad (136)$$

e

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + \dots. \quad (137)$$

Em uma forma generalizada:

$$T_i = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} g_i H(\psi) d\sigma, \quad (138)$$

em que $i = 1, 2, 3, \dots$. Portanto, é possível obter:

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \delta g H(\psi) d\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} g_n H(\psi) d\sigma. \quad (139)$$

2.4 PRINCÍPIO DA TÉCNICA DA DECOMPOSIÇÃO ESPECTRAL

Tanto a integral de Stokes, quanto a de Molodenskii, requerem anomalias de gravidade de forma contínua sobre toda a Terra para determinar o distúrbio do potencial para um único ponto. A primeira ideia, equivocada, poderia ser aplicar a integral de Stokes e Molodenskii tendo-se somente dados de uma área limitada. Entretanto, em face da inexistência ou indisponibilidade de anomalias de gravidade sobre toda a Terra estas integrais são aplicadas apenas para uma região limitada em torno do ponto de cálculo usando anomalias de gravidade observadas.

Segundo Albertella e Sansò (1994), ao invés de integrar somente na área A integra-se em todo o domínio da esfera (FIGURA 14), porém, faz-se $\Delta g(Q) = 0$ quando Q encontra-se fora do subdomínio A . A questão que pode ser elaborada é: Pode-se esperar que o resultado para a integral de Stokes, por exemplo, seja correta pelo menos em A ? Obviamente que não. É possível notar, a partir da Figura 14, que valores de Δg distantes do ponto de cálculo P , por exemplo, Δg no ponto Q separados pela distância esférica ψ , tem uma influência sobre o valor de T em P .

Neste sentido, M. S. Molodenskii, V. F. Eremeev e M. I. Yurkina escreveram:

Se, ao usar a fórmula de Stokes, as anomalias são consideradas apenas até uma distância esférica ψ_0 a partir do ponto em consideração, então é possível afirmar que os médios comprimentos de onda do campo anômalo foram removidos. Isto significa que a integração das anomalias remanescentes entre o intervalo $\psi_0 < \psi \leq \pi$ dão origem a uma função que, quando o ponto em questão está deslocado, muda gradualmente, ou seja, dá origem aos longos comprimentos de onda. (MOLODENSKII; EREMEEV; YURKINA, 1962, p. 146).

Coincidentemente, esta proposta de Molodenskii em empregar a integral de Stokes somente para uma dada região limitada, por exemplo, a calota esférica A na Figura 14, surgiu juntamente com o lançamento do primeiro satélite artificial em 4 de outubro de 1957 pela União Soviética. Molodenskii foi o primeiro a propor a combinação de anomalias de gravidade terrestre com anomalias de gravidade advindas de rastreamento de satélites artificiais.

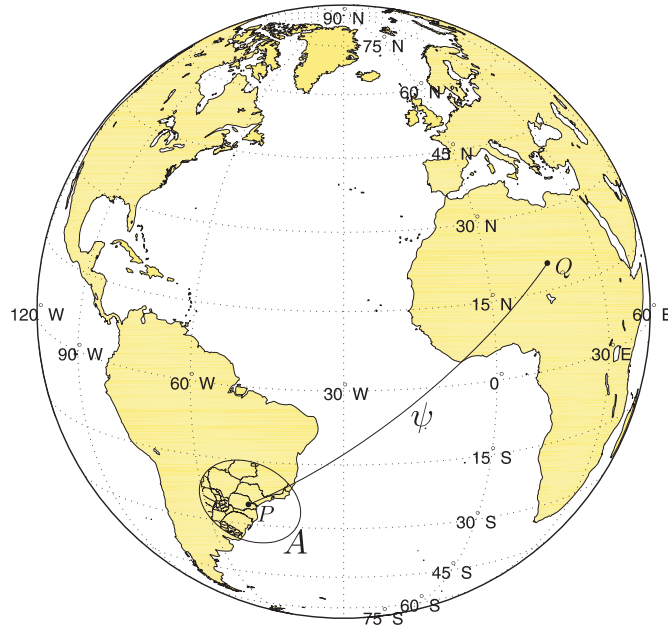


Figura 14 - Região de influência A sobre o ponto P

Fonte: O autor

Segundo Schwarz (1984) é possível dividir o espectro total de gravidade em baixa ($2 \leq \ell \leq 36$), média ($37 \leq m \leq 360$), alta ($361 \leq h \leq 3.600$), e altíssima ($3.601 \leq v \leq 36.000$) frequência. As frequências acima de 36.000 têm uma influência desprezível. Pode-se dizer que cada funcional f pode ser decomposto na forma (SCHWARZ, 1984):

$$f = f_{\ell} + f_m + f_h + f_v. \quad (140)$$

De acordo com Sansò (1995), a solução atual para o PVCG, para uma solução numérica do potencial de gravidade, é realizada cortando em pedaços o espectro como mostra a Figura 15. Notam-se nesta figura os comprimentos de onda bem como a técnica empregada para a determinação dos mesmos. Note ainda que se inicia na semicircunferência terrestre, 20.000 km, equivalente ao grau e ordem 2 do desenvolvimento em harmônicos esféricos, ou seja, meio comprimento de onda.

Uma vez que a expansão em harmônicos esféricos são generalizações, para a esfera, as séries de Fourier para a circunferência, pode-se falar em comprimentos de onda. Denotando o grau máximo da expansão em harmônicos esféricos como $n_{máx}$, isso pode ser associado com um menor comprimento de onda λ resolúvel de acordo com:

$$\lambda_{[km]} \approx \frac{2\pi}{n_{máx}} R_{[km]} \cos \varphi. \quad (141)$$

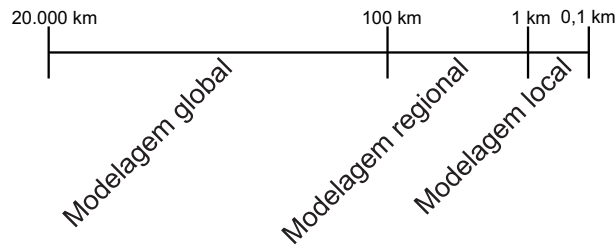


Figura 15 - Intervalos de comprimentos de onda e as técnicas relativas de aproximação

Fonte: O autor

Em muitos casos, o meio comprimento de onda, $\frac{1}{2}\lambda$, é considerado:

$$\rho_{[\text{km}]} \approx \frac{\pi}{n_{\text{máx}}} R_{[\text{km}]} \cos \varphi, \quad (142)$$

que por seu turno é associado com a resolução espacial do modelo. Para uma expansão até o grau $n = 180$, tem-se $\lambda = 200$ km para o equador (raio médio terrestre de 6.371 km), a resolução então é de $\rho = 100$ km, para detalhes consultar Seeber (2003, p. 469). Uma representação equivalente refere-se a um bloco de certo tamanho θ na esfera em relação aos valores médios representativos, por exemplo, como a média das anomalias de gravidade ar-livre.

A representação em harmônicos esféricos permite uma interpretação confiável no domínio das frequências no que se refere à magnitude e coerência. A representação espectral do campo de gravidade na forma de harmônicos esféricos, segundo o modelo de variância de Tscherning e Rapp (1974), mostra que a maior parte da energia (99,99%) da variância da ondulação geoidal está contida nos coeficientes de baixo grau, maiores que 55 km de resolução espacial.

Atualmente, existe um conjunto de dados distribuídos por toda a superfície terrestre, uma vez que este conjunto de dados é condensado em um modelo global, $T_M = \sum_{n,m}^N T_{n,m} Y_{n,m}$, é natural, que se deva então usar estas informações. Segundo Moritz (1980, p. 312), o uso de harmônicos de baixa ordem do campo de gravidade serve para remover a tendência global deste campo, por exemplo, anomalias de gravidade. No entanto, a remoção desta componente global resultará em uma componente residual menor, porém, mais irregular do que o campo original. Seja o distúrbio do potencial residual dado por:

$$T_r = T - T_M, \quad (143)$$

as observações locais, as quais são funcionais lineares para T , fornecem informações sobre o mesmo funcional aplicado para T_M .

Denominando Q_i como uma quantidade medida genérica, pode-se escrever:

$$Q_i = L_i(T), \quad (144)$$

e

$$Q_{M_i} = L_i(T_M), \quad (145)$$

estas podem ser subtraídas resultando:

$$Q_r = Q_i - Q_M = L_i(T - T_M) = L_i(T_r). \quad (146)$$

Esta é a primeira etapa da técnica da decomposição espectral.

Segundo Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006, p. 322) a técnica da decomposição espectral foi inventada, e tornando-se popular devido a K. Colic⁹ e outros, no entanto este livro não trás mais informações sobre esta afirmativa, muito menos a referência bibliográfica para K. Colic e outros. Entretanto, o termo em inglês aparece pela primeira vez no artigo de Forsberg e Tscherning (1981, p. 7844) como “*remove-restore*” *technique*. Alguns autores chamam esta técnica como *remove-compute-restore*, neste trabalho adotou-se o termo em português para *remove-restore* como decomposição (decomposição-recomposição).

Reduziu-se a parte do longo comprimento de onda da anomalia de gravidade e da influência de áreas remotas sobre o ponto de cálculo P . Deve ser mencionado, segundo Tscherning (2001), quando da remoção dos longos comprimentos de onda através da expansão de um modelo de harmônicos esféricos, uma grande parte da topografia (e a sua compensação isostática) é removida, erros de comprimento de onda podem surgir se tal não for devidamente levado em conta. Este ponto foi bem observado por Abd-Elmotaal e Kühtreiber (2003), que notaram que a técnica da decomposição tem como desvantagem remover uma parte do efeito da topografia e sua compensação duas vezes.

Porém, note-se que as informações Q , por natureza, estão no domínio do espaço. Há, portanto, necessidade de transformá-las para o domínio das frequências, efetuar as operações e retornar para o domínio do espaço. A Figura 16 mostra um perfil de anomalias de gravidade para a latitude constante de -25° e longitudes entre -180° a $+180^\circ$ e uma janela para as longitudes de -55° e -48° . É possível notar os curtos e médios comprimentos de onda do sinal da anomalia de gravidade para este perfil.

Por outro lado, deve-se discutir o que acontece com a outra parte do espectro, *i.e.*, com os curtos comprimentos de ondas do campo de gravidade. Se analisado do ponto de vista do Teorema de Nyquist, considerando que o espaçamento entre os dados em forma

⁹ K. Colic, sendo o nome completo Petar Kresimir Colic, Geodesta croata nascido em 10 de julho de 1938 e falecido em 27 de maio de 2000.

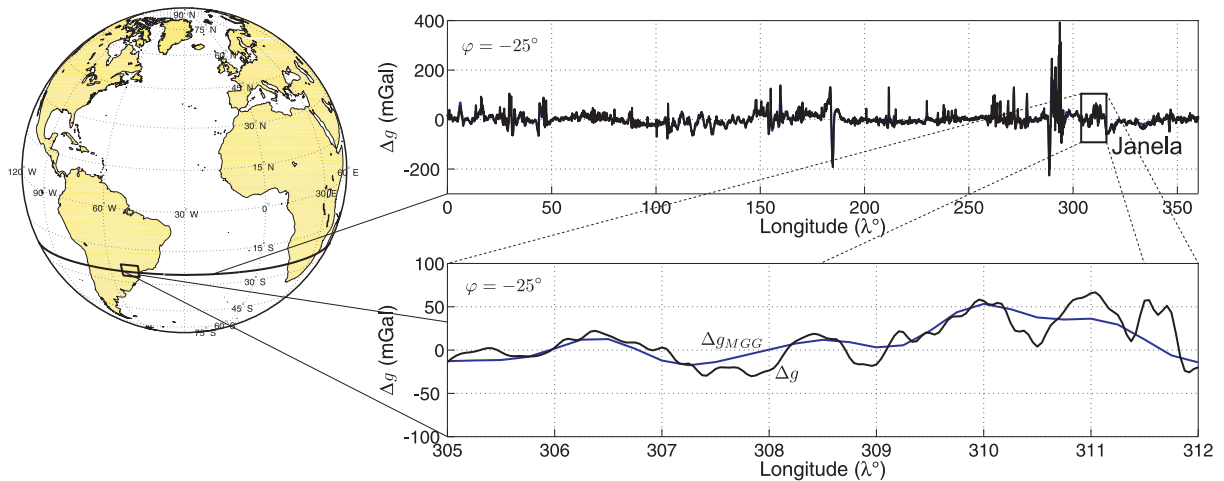


Figura 16 - Perfil de anomalias de gravidade com a técnica da decomposição

Fonte: O autor

Nota: Valores calculados com base nos coeficientes do EGM2008, anomalias de gravidade sobre a superfície terrestre. Os longos comprimentos são considerados até o grau 360 e os curtos até o grau 2190.

de uma malha seja Δ os curtos comprimentos de ondas que se podem resolver é 2Δ . Entretanto, tem-se ainda outra importante informação, tipicamente mais densa; esta é a informação da altitude em forma de um Modelo Digital de Elevação (MDT). Especialmente em regiões com o relevo acidentado, como áreas montanhosas, esta informação é responsável por partes de alta frequência da componente Q . Segundo Schwarz (1984), cerca de 2% e 34% do espectro da altura geoidal e anomalia de gravidade, respectivamente, estão contidos nas altas frequências (grau 360-36.000), onde os efeitos da topografia desempenham um papel significativo. Esta operação é a segunda etapa do procedimento da decomposição espectral, segundo a qual se obtém a anomalia de gravidade residual:

$$Q_r = Q - Q_M - Q_{MDT}. \quad (147)$$

Segundo Pellinen (1962, p. 58) é natural excluir completamente a influência das massas topográficas das anomalias de gravidade e operar no campo gravitacional residual e, posteriormente, adicionar o efeito da topografia aos valores obtidos. De acordo com Tscherning (2001), se parte dos curtos comprimentos de onda da topografia é removida, as quantidades residuais são muito mais suaves, e, assim, se torna fácil para interpolar as grandezas Q_r entre pontos observados. Entretanto, o princípio da decomposição permite também o uso de outros campos aproximados para remover as tendências; especialmente uma para os vários modelos da gravidade global que consiste de desenvolvimentos dos harmônicos esféricos do potencial T_M até o grau 180 ou mais. A etapa final é a da recom-

posição, sendo:

$$T = T_r + T_M + T_{MDT}. \quad (148)$$

A sensibilidade espectral para o funcional a ser estimado deve ser analisada e métodos padrões para minimizar efeitos como *aliasing*¹⁰ e *leakage*¹¹ devem ser empregados, pormenores são dados por Schwarz (1984). Emprega-se um MDT com a técnica da decomposição em combinação com um MGG, para facilitar a suavização da anomalia de gravidade; com auxílio de dados em forma de malha, e também as transformações e as interpolações minimizando os efeitos de mascaramento (subamostragem).

Segundo Sjöberg (2005a), as técnicas mais utilizadas de decomposição no contexto dos curtos comprimentos de onda são RTM (*Residual Terrain Modeling*)¹² e Condensação de Helmert. Uma boa revisão e discussão sobre os métodos de remoção das massas topográficas podem ser encontrada em Bajracharya (2003).

Faz-se importante ainda mencionar que no contexto da determinação do campo de gravidade, existem mais duas abordagens disponíveis para a comunidade além da decomposição espectral, sendo elas: o método da UNB (*University of New Brunswick*) conforme Novák (2000); Featherstone et al. (2004); e Ellmann e Vaníček (2007); e o método do KTH (*Royal Institute of Technology*), para alguns exemplos consultem: Daras (2008); Ulotu (2009); Abdalla (2009). Recentemente Roland et al. (2010) sugeriram um melhoramento na solução local do geoide pela incorporação direta de informações dos longos comprimentos de onda em contraste com a técnica da decomposição espectral aplicando-se uma formulação estendida da colocação, pormenores consultem a referência.

2.4.1 O método RTM

O conceito de modelagem residual do terreno foi introduzido por Forsberg e Tscherning (1981), cf. também Forsberg (1984). O método é baseado no uso de uma superfície de referência, a qual é determinada empregando-se um filtro passa-baixa sobre a superfície original (FIGURA 17) e objetiva a substituição das compensações isostáticas. Neste contexto, consideram-se somente as variações de curto comprimento de onda da topografia, removendo os longos comprimentos de onda. A média da massa total removida é, em geral, igual à zero tal como na redução isostática.

Conceitualmente, o RTM consiste no cálculo dos pequenos comprimentos de onda do campo de gravidade, mediante a escolha de uma superfície suave estritamente relacionada com o modelo do geopotencial. As massas acima desta superfície de referência são

¹⁰ Mascaramento

¹¹ Vazamento

¹² Modelagem Residual do Terreno

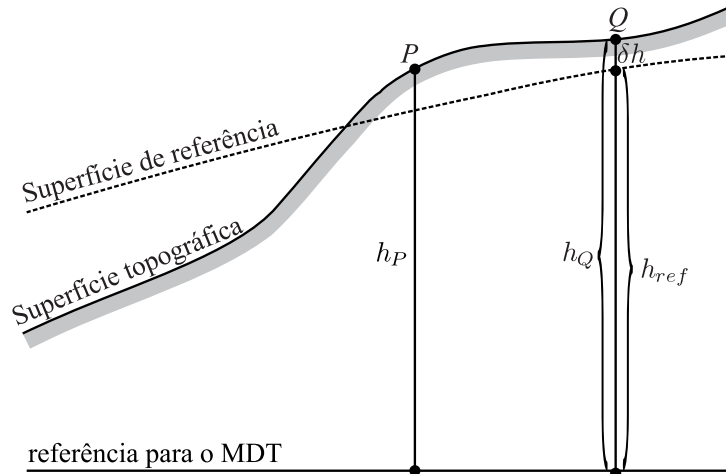


Figura 17 - Superfície de referência para o cálculo do efeito residual do terreno
Fonte: O autor

removidas e os vazios abaixo dessa são preenchidos (FIGURA 17).

Uma crítica muito importante ao método pode ser apresentada da seguinte forma: imagine o ponto Q localizado abaixo da superfície de referência ($\delta h < 0$, região em que os vazios abaixo da superfície de referência são preenchidos). Ao aplicar o RTM, este ponto estará coberto, do PVCG tem-se que o potencial é harmônico somente no exterior das massas. Nesta situação específica, faz-se necessário aplicar a condensação de Helmert (próxima seção).

O efeito direto da topografia sobre a gravidade neste método de redução é expresso como (FORSBERG; TSCHERNING, 1997):

$$Q_{RTM} = G\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{h_{ref}}^h \frac{z - h_P}{[(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - h_P)^2]^{3/2}} dx dy dz. \quad (149)$$

A contribuição para a topografia é removida e restaurada usando um modelo para a topografia igual para a topografia verdadeira e uma de referência, suave, mas variando a elevação da superfície. A superfície de referência pode ser construída por uma malha de resolução fina da topografia e uma grade média gerada tomando, por exemplo, a média móvel para um apropriado número de blocos adjacentes.

A redução RTM pode ser também aproximada pela seguinte fórmula:

$$Q_{RTM} \approx 2\pi G\rho (h - h_{ref}) - ct, \quad (150)$$

quando a elevação média é adequadamente suficiente para apresentar os longos comprimentos de onda da topografia.

Na técnica da decomposição empregando-se a redução RTM tem-se:

$$Q_r = Q - Q_M - Q_{RTM}. \quad (151)$$

Desde já, na etapa de restauração, a redução RTM não possui efeito indireto, porém, há uma contribuição pequena que deve ser restaurada. De acordo com (FORSBERG; TSCHERNING, 1997), matematicamente tem-se:

$$T_{RTM} = G\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{h_{ref}}^h \frac{1}{[(x_P - x)^2 + (y_P - y)^2 + (h_P - z_Q)^2]^{3/2}} dx dy dz, \quad (152)$$

sendo:

$$r = \sqrt{(x_P - x)^2 + (y_P - y)^2 + (h_P - z_Q)^2}. \quad (153)$$

Pode-se escrever para o núcleo $\frac{1}{r}$ na integral (152) como:

$$\frac{1}{r} = [r_0^2 + (z - h_P)^2]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r_0} \left[1 + \frac{(z - h_P)^2}{r_0^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (154)$$

Pode-se ainda fazer:

$$\frac{(z - h_P)^2}{r_0^2} = \tan^2 \beta. \quad (155)$$

Levando a (155) na (154) e expandindo o resultado em série de Taylor em função de β tem-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{2} \frac{(h - h_{ref})^2}{r_0^3}, \quad (156)$$

onde r_0 é a distância planar, se considerado somente o primeiro termo da expansão em série de Taylor, e após integrar em relação à variável z , pode-se escrever a (152) na seguinte forma:

$$T_{RTM} = G\rho (h - h_{ref}) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r_0} dx dy. \quad (157)$$

Esta integral tem sido denominada por Moritz (1968) por aproximação linear.

A etapa de recomposição pode ser concluída com:

$$T = T_r + T_M + T_{RTM}. \quad (158)$$

O método de redução RTM fornece o quase geoide. Aplicando o Teorema de Bruns, cf. (HEISKANEN; MORITZ, 1967, p. 142), na (158), tem-se:

$$\zeta = \zeta_r + \zeta_M + \zeta_{RTM}. \quad (159)$$

Esta quantidade, ζ_{RTM} é também igual à distância entre o teluroide e o coteluroide como mostra a Figura 18.

No sentido de unificação de *datum* vertical, e até mesmo outras aplicações, faz-se necessário criar regras precisas para definir o modelo da superfície topográfica de referência para o cálculo das componentes de alta frequência do campo. Esta topografia de referência deverá ser a mesma implícita no modelo do geopotencial, muito embora os funcionais deste sejam poucos correlacionados com os elementos principais da topografia. Para uma redução coerente dos dados a definição de uma superfície de referência apropriada é essencial, produzindo, como o esperado, regularização dos dados.

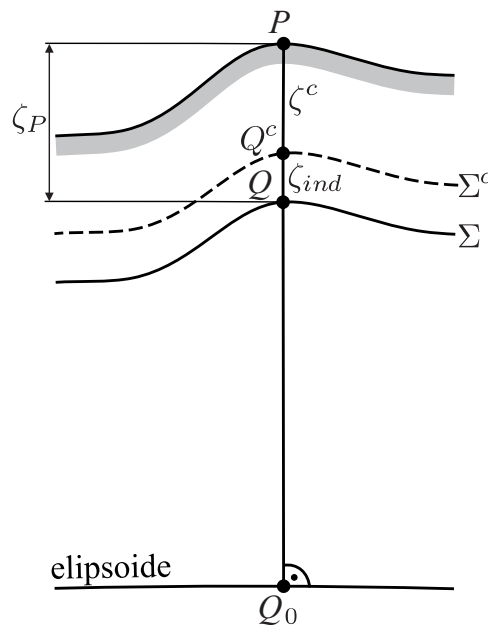


Figura 18 - Efeito indireto sobre o teluroide
Fonte: O autor

Detalhes sobre redução da gravidade no contexto da “teoria moderna” podem ser encontrados em Heiskanen e Moritz (1967, seção 8-11), inclusive com pormenores sobre o efeito direto sobre a gravidade. Note que a princípio, a anomalia de gravidade deve ser calculada com relação à superfície terrestre, P , e o coteluroide Q^c . E como última etapa converte-se o coteluroide em teluroide aplicando-se o efeito indireto no contexto da técnica RTM.

Na Figura 19(a) pode-se notar, a guisa de exemplo, a topografia residual ($h_{SRTM} - h_{DTM2006}^{360}$) para a área em torno do ponto de cálculo, ponto 9°E e 48°N em que o SRTM (*Shuttle Radar Topography Mission*) e o DTM (*Digital Terrain Model*) foram aplicados. O DTM2006.0 é composto por cerca de 2,4 milhões de pares de coeficientes totalmente nor-

malizados C_{lm}^{topo} e S_{lm}^{topo} que fornecem elevações usando (PAVLIS; FACTOR; HOLMES, 2007):

$$H(\lambda, \varphi) = R \sum_{l=0}^{l_{\max}} \sum_{m=0}^l (C_{lm}^{topo} \cos m\lambda + S_{lm}^{topo} \sin m\lambda) \cdot P_{lm}(\sin \varphi). \quad (160)$$

A Figura 19(b) fornece uma visão como a topografia residual pode contribuir à anomalia de altitude RTM (ζ_{RTM}). Nesta figura somente o ponto no centro (0 km, 0 km) possui o valor mais condizente com a realidade para a componente ζ_{RTM} . Para tanto, empregou-se um raio de 110 km de integração numérica. Considerando o raio de integração de 110 km para ζ_{RTM} não se pode esperar que os valores distantes do centro estivessem corretos, pois os mesmos passam a ser afetados por efeitos de borda como pode ser notado na parte superior da Figura 15(b).

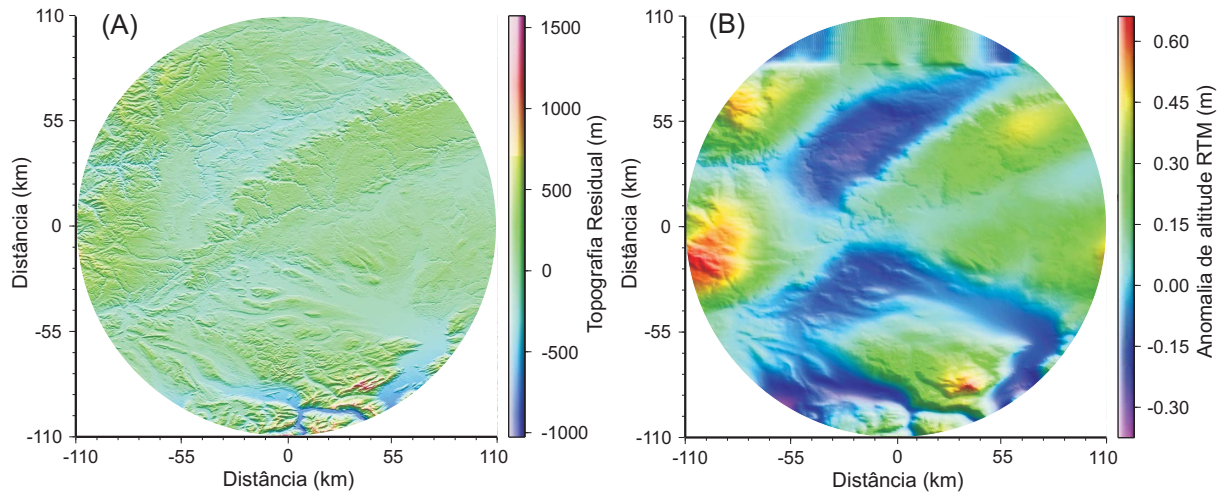


Figura 19 - Topografia residual centrada no ponto 9°E e 48°N com base no SRTM e o DTM2006.0 desenvolvido até o grau 360

Fonte: O autor

Para o estudo com respeito à distância máxima de integração (diferentes zonas de influência de distâncias) para a anomalia de altitude RTM, ζ_{RTM} , aplicaram-se vários valores iniciando em 0 km e variando de 5 em 5 km até um máximo de 300 km para o raio de integração, $r_0^2 = (x_P - x)^2 + (y_P - y)^2$, conforme a (157) devidamente convertida em unidade linear. Para o efeito gravimétrico RTM, Δg_{RTM} , foi realizado o mesmo ensaio, calculando-se a contribuição do modelo residual da topografia, porém, o efeito da distância de influência sobre a anomalia residual é quase nulo, variando poucos décimos de mGal entre os raios 100 e 220 km para um ponto em particular. No entanto, existe uma amplitude de aproximadamente 4 cm na anomalia de altitude residual entre os raios 110 e 140 km, sem que se verifique uma variação equivalente no valor de anomalia de gravidade RTM. Para uma proporcionalidade dos efeitos topográficos, adota-se uma área fixa suficiente-

mente grande, pelo menos 220 km a partir das estações gravimétricas, de acordo com as considerações no capítulo 5.

2.4.2 Condensação de Helmert

A aplicação da integral de Stokes requer um campo potencial o qual seja harmônico fora do geoide. As massas topográficas devem ser removidas de alguma forma. De acordo com Heck (2003b), se usado o platô de Bouguer para esta remoção, o mesmo poderá acarretar em uma forte mudança na massa total da Terra causando grandes efeitos indiretos (FIGURA 20) sobre o potencial e sobre o geoide, de até dez vezes mais que as alturas geoidais. A razão é, segundo Heiskanen e Moritz (1967, p. 142), que a Terra está, em geral, isostaticamente compensada. Por esta razão, as massas topográficas devem ser redistribuídas sobre ou abaixo do geoide dentro dos limites do processo de redução, tal que o efeito indireto sobre as alturas geoidais é fortemente reduzido ou anulado.

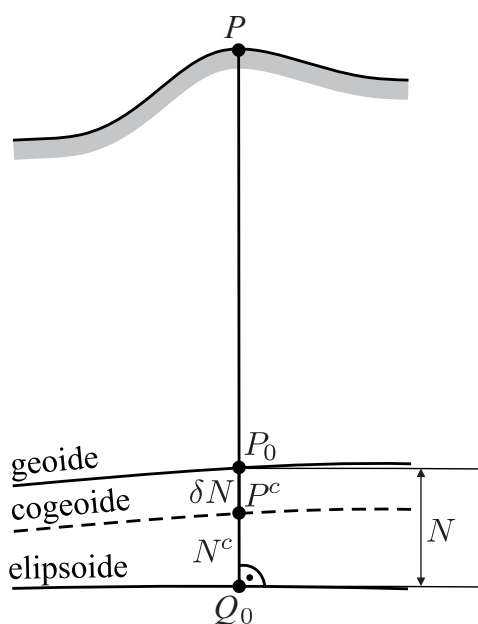


Figura 20 - Efeito indireto sobre o geoide

Fonte: O autor

O efeito indireto é frequentemente determinado reduzindo-se a topografia à camada de superfície ao nível do mar (geoide) de acordo com o método da condensação de Helmert. Para pormenores recomenda-se: Heiskanen e Moritz (1967, p. 145); Moritz (1968); Moritz (1969); Vaníček e Kleusberg (1987); Wang e Rapp (1990); Heck (1993); Vaníček e Martinec (1994); Sjöberg (2000).

O efeito indireto no potencial, desconsiderando o potencial centrífugo, é:

$$T_{ind} = V_{top} - V_c. \quad (161)$$

Em que V_{top} é o potencial para a topografia e V_c é o potencial das massas compensadas. De acordo com Wichiencharoen (1982), o efeito indireto sobre o geóide pode ser decomposto em:

$$T_{ind} = \delta T_0 + \delta T_1 + \delta T_2, \quad (162)$$

$$\delta T_0 = -\pi G \rho H^2, \quad (163)$$

$$\delta T_1 = G \rho \int \frac{H - H_P}{\sqrt{x^2 + y^2 + \bar{H}^2}} dx dy - G \rho \int \frac{H - H_P}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad (164)$$

$$\delta T_2 = -\frac{G \rho}{6} \int \frac{H^3 - H_P^3}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + \bar{H}^2}} dx dy - \frac{G \rho \bar{H}^2}{2} \int \frac{H - H_P}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + \bar{H}^2}} dx dy. \quad (165)$$

No contexto da técnica da decomposição empregando-se a redução de Helmert tem-se:

$$Q_r = Q - Q_M - Q_{Helmert}. \quad (166)$$

A anomalia de gravidade de Helmert é calculada subtraindo-se o efeito das massas topográficas totais e adicionando o efeito das massas topográficas compensadas, que na verdade nada mais é do que acrescentar o valor da correção de terreno na anomalia ar-livre, ou ainda:

$$Q_r = Q - Q_M + ct. \quad (167)$$

Pormenores podem ser obtidos em Heiskanen e Moritz (1967, p. 145). Note que na (167) $Q + ct$ é a anomalia de gravidade de Helmert (Também conhecida como anomalia de gravidade de Faye).

Para a etapa de restauração tem-se:

$$T = T_r + T_M + T_{ind}. \quad (168)$$

Neste contexto, a anomalia de gravidade deve ser determinada sobre o cogeóide. Pormenores destas reduções podem ser encontrados em Heiskanen e Moritz (1967, seção 8-2).

2.5 MODIFICAÇÃO PARA O NÚCLEO DA INTEGRAL DE STOKES

O núcleo da integral de Stokes atua como uma função de ponderação para as anomalias de gravidade. Ela depende da distância esférica entre o ponto de integração e o ponto de cálculo (*cf.* Figura 21). $S(\psi)$ decresce com o aumento de ψ até cruzar o eixo em

zero próximo a 39° , e oscila com valores pequenos até 180° (FIGURA 21). Na região em torno do ponto de cálculo é necessária uma atenção particular, porque $S(\psi)$ tende para o infinito para $\psi = 0$. Esta função é considerada parte essencial dos núcleos (ou *Kernel*) das (90) e (93).

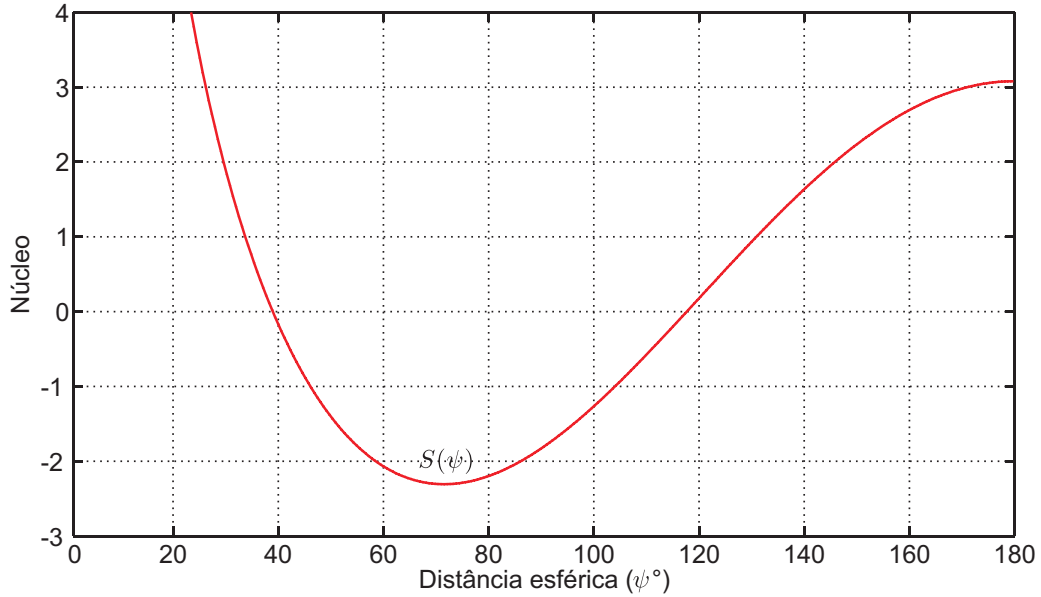


Figura 21 - Comportamento do núcleo da integral de Stokes

Fonte: O autor

Dividindo-se a integral de Stokes em duas partes, a modificação do núcleo da integral de Stokes é dada em coordenadas polares como Heiskanen e Moritz (1967, p. 259):

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{\psi_0} \int_0^{2\pi} \Delta g S(\psi) \sin \psi d\psi d\alpha + \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\psi_0}^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g S(\psi) \sin \psi d\psi d\alpha. \quad (169)$$

Se a integração é realizada somente em torno do ponto de cálculo P até uma distância esférica ψ_0 (Ω_k com $0 < \psi_k \leq \psi_0$), somente a primeira integral em (169) é considerada (FIGURA 22).

O erro δN que resulta a partir da negligência de zonas maiores que $\psi = \psi_0$ (Ω_\odot) é, entretanto dado pela segunda integral em (169) (HEISKANEN; MORITZ, 1967):

$$\delta N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\psi_0}^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g S(\psi) \sin \psi d\psi d\alpha. \quad (170)$$

Introduzindo uma função de descontinuidade conforme Molodenskii, Ereemeev e

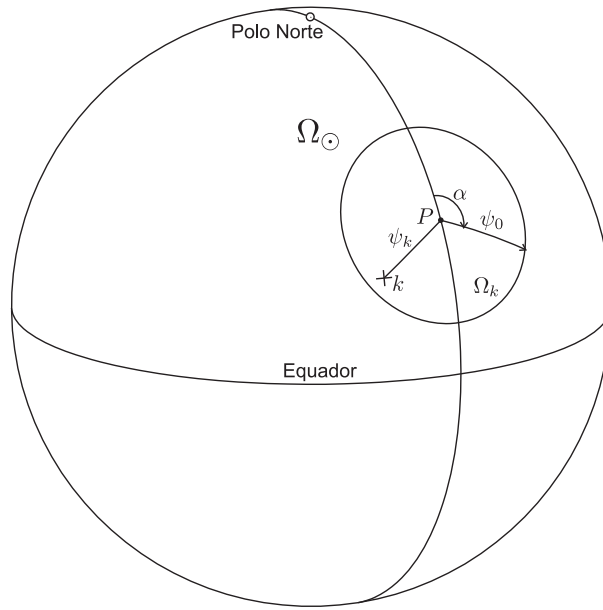


Figura 22 - Coordenadas polares para a esfera unitária e domínio de integração, toda a esfera é simbolizada como Ω_{\odot} e a calota esférica por Ω_k

Fonte: O autor

Yurkina (1962, p. 147):

$$\bar{S}(\cos \psi) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq \psi < \psi_0 \\ S(\cos \psi) & \text{para } \psi_0 \leq \psi \leq \pi \end{cases}, \quad (171)$$

para a integral (170) tem-se:

$$\delta N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g \bar{S}(\psi) \sin \psi d\psi d\alpha, \quad (172)$$

em que a integração é realizada sobre toda a esfera. Para isso é necessário expandir a função de Stokes em polinômios de Legendre. A função $\bar{S}(\psi)$ pode ser escrita na forma de um polinômio de Legendre como:

$$\bar{S}(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n P_n(\cos \psi), \quad (173)$$

onde Q_n são coeficientes que dependem de ψ_0 . Em Heiskanen e Moritz (1967, p. 260) por conveniência separou-se os coeficientes na (173) como $\frac{2n+1}{2} Q_n$ e fazendo-se uso da equação (ibid 1-70, p. 30):

$$a_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\theta, \lambda) P_n(\cos \theta) d\sigma. \quad (174)$$

Pode-se escrever então:

$$\frac{2n+1}{2}Q_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{S}(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi d\alpha. \quad (175)$$

Integrando somente em relação a α tem-se de imediato $\int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi$ e a (175) chega a:

$$Q_n = \int_0^\pi \bar{S}(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi = \int_{\psi_0}^\pi S(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi. \quad (176)$$

Segundo Meissl (1971), Q_n são os coeficientes de truncamento de Molodenskii. A avaliação destes coeficientes pode ser encontrada em Molodenskii, Ereemeev e Yurkina (1962, p. 148) e Heiskanen e Moritz (1967, p. 262) e, fórmulas de recorrência para os mesmos são disponíveis em Meissl (1971, seção B.3-3) para todos os n sendo $Q_n(\psi_0)$. Fórmulas de recorrências mais compactas podem ser encontradas em Hagiwara (1972), ainda em Paul (1973); Hagiwara (1976); e Shepperd (1982). O comportamento do coeficiente de integração de acordo com a integral (167) é mostrado na Figura 23.

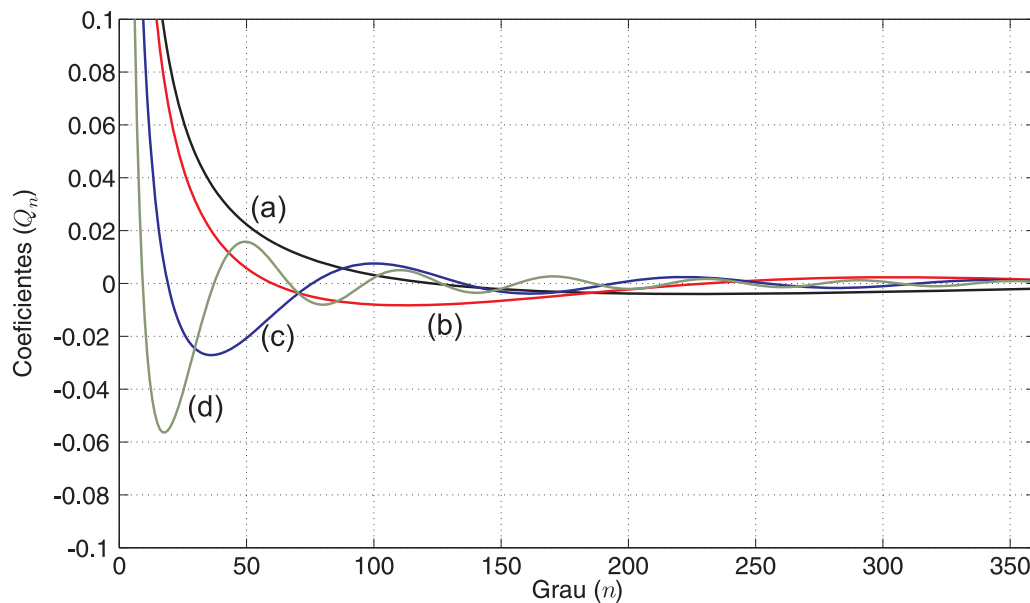


Figura 23 - Comportamento do coeficiente de integração de acordo com a integral (176)

Fonte: O autor

Na Figura 23 a curva (a) representa o comportamento do coeficiente de truncamento para uma distância esférica de 0.5° , a curva (b) representa o comportamento do coeficiente de truncamento para uma distância esférica de 1° , a curva (c) representa o comportamento do coeficiente de truncamento para uma distância esférica de 3° e a curva

(d) representa o comportamento do coeficiente de truncamento para uma distância esférica de 6° .

Inserindo a (173) na (172) e após mudar a ordem de integração e do somatório obtém-se:

$$\delta N = \frac{R}{8\pi\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_n \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Delta g P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi d\alpha. \quad (177)$$

a integral dupla é igual a $\frac{4\pi\Delta g_n}{(2n+1)}$ ¹³. Então a (176) resulta em:

$$\delta N = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \Delta g_n(\varphi, \lambda). \quad (178)$$

Esta relação significa que alterações em n causam uma ampliação ou redução do valor do erro de truncamento δN . Em outras palavras, eles podem ser alterados para reduzirem o erro de truncamento. Neste sentido, a modificação da função núcleo é a base para a minimização do erro de truncamento.

Na literatura científica estão disponíveis vários trabalhos sobre modificações de Kernel, dentre eles conclui-se serem importantes: Molodenskii, Eremeev e Yurkina (1962); Witte (1967); Wong e Gore (1969); Meissl (1971); Heck e Grüniger (1988); entre outros. É importante mencionar que estes autores trabalham com modificações determinísticas. Exemplos de determinações estocásticas podem ser encontradas em Sjöberg (1980); Sjöberg (2003a); Ellmann (2004); Sjöberg (2005b); Ellmann (2005a)¹⁴ entre outros trabalhos.

O núcleo modificado apresenta a seguinte característica:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma_0} S^L(\psi) (\Delta g - \Delta g_n) d\sigma + \frac{1}{\gamma} \sum_{n=2}^M \frac{R}{n-1} \Delta g_n. \quad (179)$$

Quando Δg é a anomalia de gravidade terrestre e Δg_n é a anomalia de gravidade advinda de um MGG com grau máximo M . A função $S^L(\psi)$, o núcleo da integral de Stokes modificado, tem a expansão em séries:

$$S^L(\psi) = S(\psi) - \sum_{n=2}^L \frac{2n+1}{2} Q_n P_n(\cos \psi), \quad (180)$$

onde L é o grau da modificação.

¹³ Empregando-se o Teorema da Expansão e Relações de Ortogonalidade (HEISKANEN; MORITZ, 1967, p. 30, equação 1-71).

¹⁴ Aos interessados em modificação estocástica empregando-se Colocação por Mínimos Quadrados (CMQ) esta é uma boa leitura, o texto é muito didático e possui todas as rotinas computacionais disponíveis em: <http://www.iamg.org/index.php/publisher/articleview/frmArticleID/112/> (consultado em 03/09/2010, às 13:37).

De acordo com Wong e Gore (1969):

$$Q_n = \frac{2}{n-1}, \quad \forall n \geq 2. \quad (181)$$

Com a modificação de Wong e Gore (1969) tem-se para a (180):

$$S_{WG}(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) - \sum_{n=2}^L \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi). \quad (182)$$

Na Figura 24 pode-se visualizar o comportamento para o núcleo da integral de Stokes original (a), o núcleo modificado para o grau $L = 30$ e para o grau $L = 360$.

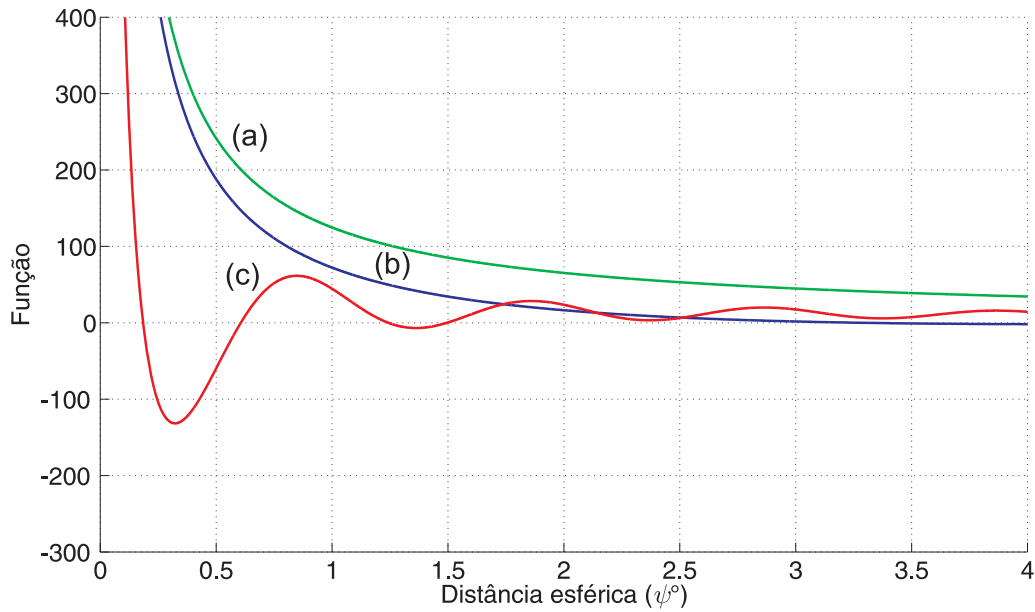


Figura 24 - Modificações de acordo com Wong e Gore para a função núcleo original (a), modificada até $L = 30$ (b) e $L = 360$ (c)

Fonte: O autor

Faz-se importante mencionar que no contexto da técnica da decomposição espectral a modificação de Wong e Gore (1969) possui o grau de modificação $L \leq M$, sendo M o grau dos longos comprimentos de onda. A medida que se aumenta o grau da modificação, consequentemente o grau do Polinômio de Legendre, fica-se sujeito ao Fenômeno de Gibbs, conforme observaram Vaníček e Featherstone (1998), que esta modificação torna-se instável em torno de $M = 360$.

A modificação de Meissl (MEISL, 1971) tornou a função (171) contínua somente para a calota esférica $\sigma_0 \forall \psi \leq \psi_0$ da seguinte forma:

$$\bar{S}_{Meissl} = \begin{cases} S(\psi) - S(\psi_0) & \text{para } 0 \leq \psi \leq \psi_0 \\ 0 & \text{para } \psi_0 < \psi \leq \pi \end{cases}. \quad (183)$$

A Figura 25 mostra o comportamento desta modificação para as distâncias esféricas de 1° (c) e 3° (b) e o núcleo original (a).

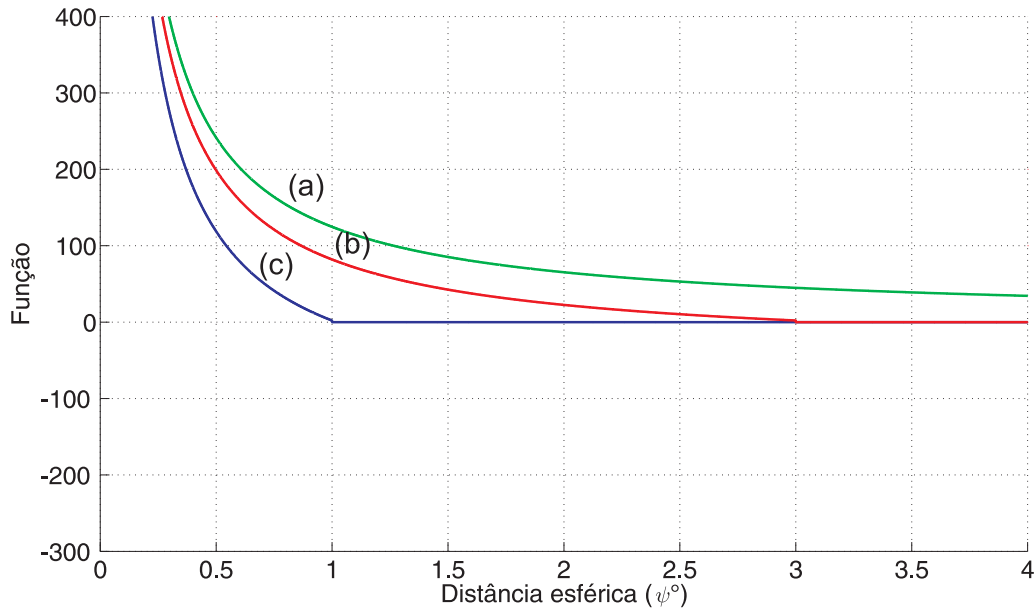


Figura 25 - Modificação de Meissl para o núcleo de Stokes empregando-se 1° e 3°

Fonte: O autor

Heck e Grüniger (1988) no sentido de melhorar esta descontinuidade, propuseram ao invés do núcleo original na (183) usar a modificação de Wong e Gore sendo:

$$\bar{S}_{HG} = \begin{cases} S_{WG}(\psi) - S_{WG}(\psi_0) & \text{para } 0 \leq \psi \leq \psi_0 \\ 0 & \text{para } \psi_0 < \psi \leq \pi \end{cases} \quad (184)$$

Na Figura 26 pode-se visualizar o comportamento dos núcleos após modificações usando a metodologia sugerida por Heck e Grüniger. A vantagem desta modificação é que os coeficientes de truncamento de Molodenskii Q_n decaem com uma taxa de n^{-2} enquanto que para as modificações de Meissl e Wong e Gore têm-se uma taxa de decaimento de n^{-1} .

Na prática a escolha da melhor modificação (a mais conveniente) é a que apresentar a menor diferença quando da comparação com dados independentes, por exemplo, GPS sobre RNs para o caso do geoide ou quase geoide. Exemplos são apresentados em: Ellmann (2004); Amos (2007); entre outros. Se existem tantas modificações, como foram vistas algumas, por que a escolha da mais adequada, bem como a distância de truncamento, quando for o caso, dependerá de informação GPS sobre RNs? A partir da revisão de literatura acima que discute as modificações, não está claro qual a modificação do núcleo da integral de Stokes, bem como, qual o tamanho da calota de integração e remoção

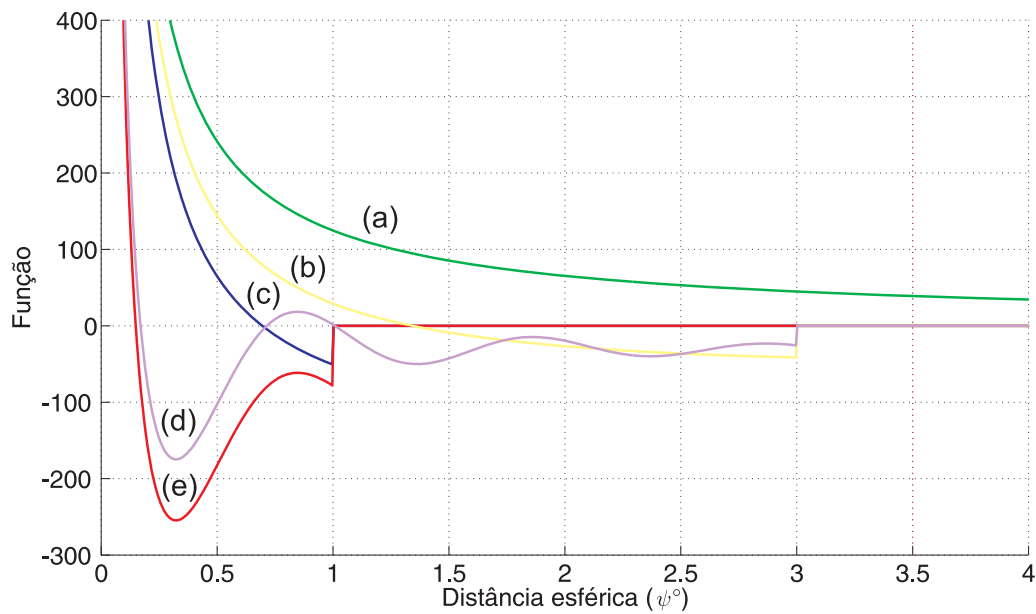


Figura 26 - Modificação do núcleo de Stokes conforme Heck e Grüniger

Fonte: O autor

Nota: A curva (a) é a função de Stokes; (b) $\psi_0 = 1^\circ$ e $L = 30$; (c) $\psi_0 = 1^\circ$ e $L = 360$; (d) $\psi_0 = 3^\circ$ e $L = 30$; (e) $\psi_0 = 3^\circ$ e $L = 360$

do grau do polinômio de Legendre (onde aplicável) fornece os melhores resultados em um determinado local.

Teoricamente, cada uma das modificações acima descritas são melhorias de suas antecessoras. Além disso, vários estudos que investigaram as diferenças entre as modificações deram resultados inconclusivos, tal que não podem ser generalizados. Isto é, aparentemente devido às características e erros espacialmente variáveis das fontes de dados diferentes de gravidade, que produz resultados diferentes em seus cálculos em suas respectivas áreas de avaliação.

3 PROBLEMAS EM ABERTO - CASO BRASILEIRO

3.1 A REDE ALTIMÉTRICA FUNDAMENTAL BRASILEIRA

Em outubro de 1945, o Conselho Nacional de Geografia (CNG), atualmente a Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), iniciou o trabalho de nivelamento geométrico de primeira ordem para o Estado de Santa Catarina, partindo de Torres, Rio Grande do Sul (MATTOS, 1948). Em 1948, o primeiro ajustamento para a rede altimétrica foi realizado. Com a continuidade das atividades de nivelamento para o país, um segundo ajustamento foi realizado em 1952, incluindo as seguintes redes existentes (BESERRA, 1952):

- A rede altimétrica do Serviço Geográfico do Exército (SGE);
- Redes do Instituto Geográfico e Geológico de São Paulo (IGG); e
- Redes do Departamento Geográfico do Estado do Rio de Janeiro.

Para o primeiro ajustamento, a rede do IGG foi integrada com a rede nacional do CNG. Em um terceiro ajustamento, em 1959, o, até então DVB, foi transferido de Torres para Imbituba, Santa Catarina. O DVB em Imbituba foi definido a partir de 9 anos de série temporal de observações do nível do mar, Torres tinha somente 1 ano de observações (ALENCAR, 1968). Depois do terceiro ajustamento, muitos ajustamentos manuais foram realizados para inserir novos circuitos de nivelamento à rede antiga.

Luz (2008) chama a atenção para o aspecto que deve ser destacado nos primeiros ajustamentos referentes à homogeneidade temporal que caracteriza as redes consideradas em cada um dos sucessivos ajustamentos. Tal característica foi consequência natural tanto do desenvolvimento espacialmente homogêneo da RAFB naquelas primeiras décadas, como da própria organização daqueles ajustamentos. A Figura 27 mostra a configuração atual da RAFB. É interessante mencionar que a extensão atual desta rede é aproximadamente um pouco mais do que quatro voltas em torno da Terra, se considerado nivelamento e o contranivelamento este número é duas vezes maior.

Não muito distante, deve ser mencionado ainda à existência de uma rede de nivelamento localizada ao norte do Rio Amazonas, no estado do Amapá, a qual não é referenciada ao DVB com origem em Imbituba (FIGURA 28). Esta pequena porção existente da RAFB não pode ser conectada com o *Datum* de Imbituba, sendo então, conduzido para o uso do nível médio do mar no Porto de Santana, relacionado ao período de 1957

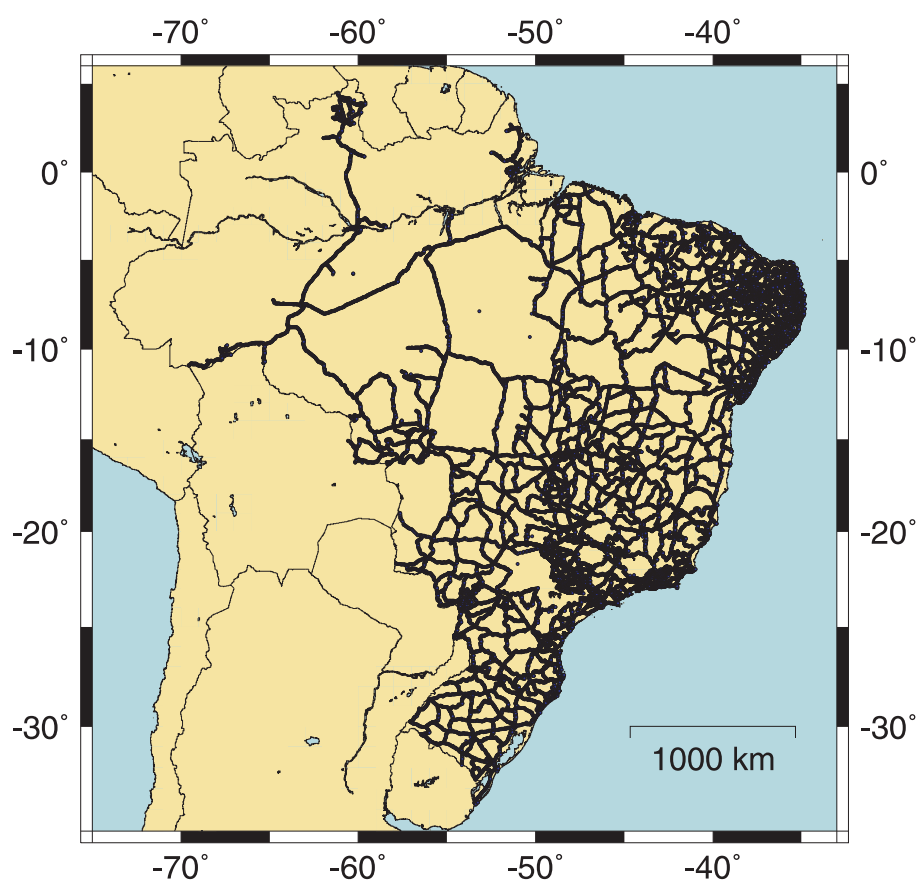


Figura 27 - Rede Altimétrica Fundamental Brasileira

Fonte: O autor

Nota: Banco de dados cedido pelo IBGE no mês de maio de 2009.

a 1958¹⁵. Por conta da largura do Rio Amazonas, é impossível transportar as altitudes da rede originada no Sul com nivelamento geométrico usando a técnica de travessia de rio ou vale muito empregada pelo IBGE, para conectar a pequena porção a norte. De acordo com Dalazoana (2005) e Luz (2008), a conexão entre o *datum* de Imbituba e o *datum* de Santana pode ser a mais importante linha de investigação para estudos relacionados com a unificação de redes verticais no Brasil.

Segundo Luz (2008), as altitudes do SGB foram obtidas usando nivelamento geométrico dissociado de observações gravimétricas. O mesmo problema é observado em muitos países da América do Sul. Somente a correção ortométrica-normal é aplicada (FREITAS; BLITZKOW, 1999). Um ajustamento rigoroso para redes de nivelamento requer a transformação para que os desníveis observados resultem em diferenças de potencial usando gravidade ao longo das linhas de nivelamento. Segundo Sansò e Vaníček (2006), no ajus-

¹⁵ Informação disponível na página: <http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia>. Consultado em 07 de fevereiro de 2011 às 15:26.

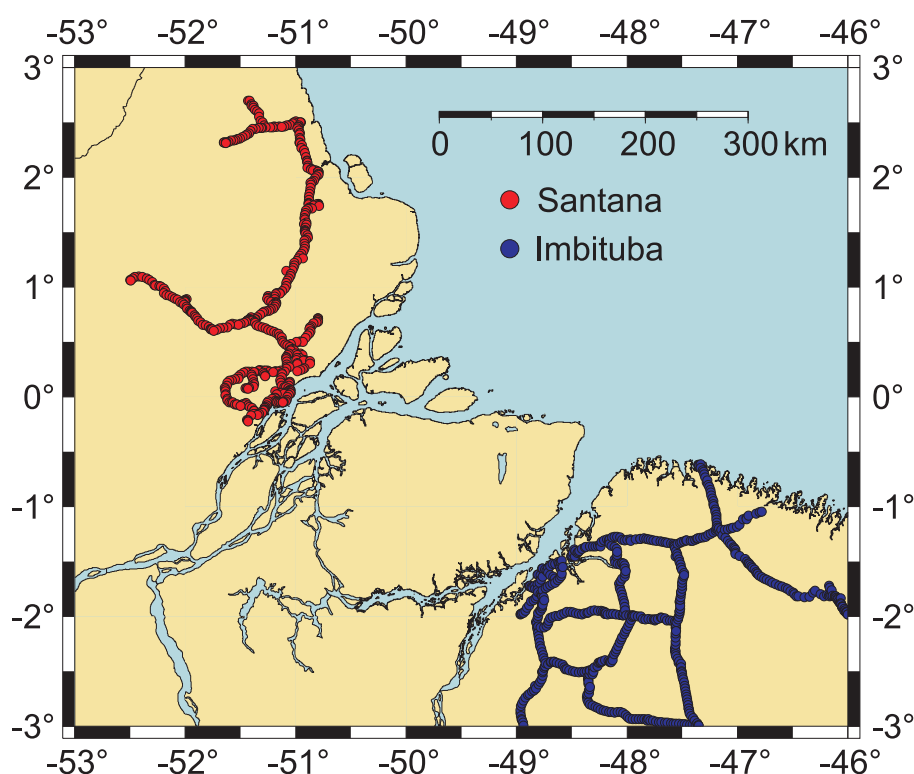


Figura 28 - Redes altimétricas com origens em Imbituba e Santana

Fonte: O autor

Nota: Banco de dados cedido pelo IBGE no mês de maio de 2009.

tamento para uma rede de nivelamento, é necessária, uma componente vertical definida em um sistema de altitudes holonômico. Neste contexto, o sistema natural de coordenadas vertical holonômica é o número geopotencial, muito embora estes autores provem que tanto a altitude normal, ortométrica, e naturalmente a dinâmica podem ser empregadas no processo de ajustamento.

Desde já, onde observações da gravidade não são avaliadas em uma extensão suficiente, gravidade normal tem sido empregada calculando diferenças de esferopotencial como aproximações de diferenças de geopotencial. A altitude ortométrica-normal resultante pode ser considerada como aproximação para altitude normal ou para a ortométrica: a mesma leva em conta a variação da gravidade normal com a latitude e altitude.

Negligências das correções do efeito da gravidade para os circuitos de nivelamento resulta em grandes erros. A Figura 29 mostra um exemplo de tal problema, para a região de Curitiba, com uma linha de nivelamento na direção norte-sul de 55 km de extensão, evidenciando o efeito da correção ortométrica-normal (*CON*) versus a acurácia para o nivelamento. Para a condição mostrada, a linha de nivelamento nesta região não deve ultrapassar 48 km tomando em conta a tolerância de $4mm\sqrt{k}$, em que k é a distância em

km. Note-se ainda na Figura 29 o comportamento da correção normal (*CN*) levando em consideração o valor de gravidade real e o valor normal.

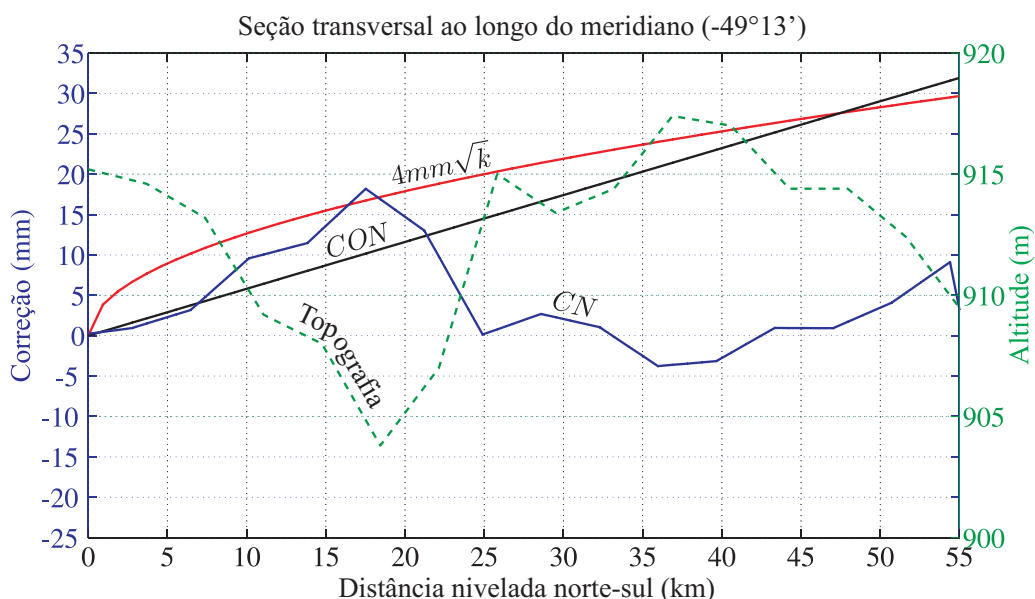


Figura 29 - Efeitos do não paralelismo das superfícies equipotenciais sobre as linhas de nivelamento

Fonte: O autor

Nota: Os valores da correção normal (*CN*) foram calculados com base na equação (32) e a correção ortométrica-normal (*CON*) com a equação (38).

Segundo Luz (2008), a RAFB não está provida de condições, até o presente momento, para a conexão de *datum* vertical com outras redes de países da América do Sul. A razão é a falta de homogeneidade e consistência da distribuição de dados gravimétricos. O mesmo autor ainda afirma que a integração da RAFB ao futuro *datum* vertical para o Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas (SIRGAS) é objeto de dificuldades específicas, a saber:

- A maioria das informações gravimétricas não é conectada com as RNs;
- As poucas RNs que coincidem com estações gravimétricas são, em grande parte, dissociadas do banco de dado das mesmas - existem algumas inconsistências sérias entre elas (RNs e estações gravimétricas); e
- A falta de condições para conectar as altitudes da sub-rede de Santana com o resto das RNs do SGB, em que as altitudes são referidas a Imbituba.

Segundo Dalazoana (2005), a maior parte dos *data* verticais dos países da América do Sul são baseados na determinação do nível médio do mar para diferentes estações

maregráficas para diferentes épocas e período de observações entre as épocas de 1940 a 1960. Sabe-se que cada *datum* vertical é referido a uma particular superfície equipotencial, associado com a estação maregráfica e fixa para uma dada época. Em consequência, não são relacionadas com um geoide global. A distância entre uma superfície equipotencial particular (*datum* vertical local) e uma superfície equipotencial global (*datum* vertical global) é conhecida como a Topografia do Nível Médio do Mar (TNMM), do inglês *Sea Surface Topography* (SSTop). Esta ainda pode ser dividida em uma parte dinâmica e uma constante. Para maiores detalhes consultar Seeber (2003, seção 9.3.1).

Na América do Sul, a discussão sobre o objetivo de unificação dos sistemas verticais iniciou-se em 1997 com a criação do grupo de trabalho *datum* vertical para o projeto SIRGAS. Porém, se usado somente os extremos de redes verticais nas regiões de fronteiras para a conexão entre países para cada *datum*, deve-se assumir que os afastamentos verticais entre os *data* são constantes. Entretanto, é possível que as redes verticais estejam inclinadas e/ou distorcidas devido a tratamentos diferenciados nos nivelamentos. Os terminais das redes de nivelamento usados para a conexão não apresentam valores constantes, somente em termos de diferença de potencial é que se pode determinar estes afastamentos. A negligência dos efeitos das irregularidades locais do campo de gravidade sobre as altitudes resulta em distorções sistemáticas das altitudes calculadas conforme observa Pereira (2009).

Tendo em vista conexões de *data* verticais locais, é necessário uma abordagem sobre as marés terrestres, ou seja, é importante que ambas as medidas estejam no mesmo sistema de maré, neste caso: O posicionamento GPS; medições da gravidade; e sistemas locais de altitude. Há três abordagens para tratar os efeitos permanentes de maré terrestre sobre o geopotencial (MÄKINEN; IHDE, 2008):

- O sistema maré média: o efeito médio permanente das marés não é retirado da forma da Terra.
- O sistema livre de maré: a deformação permanente é eliminada da forma da Terra, bem como os efeitos diretos e indiretos do potencial associado com as marés.
- O sistema maré zero: apenas os efeitos diretos do potencial associado com as marés são removidos.

Em Ekman (1989) são apresentadas as equações para transformar altitudes e valores de gravidade entre os sistemas de marés. As transformações entre uma diferença de altitude acima do geoide-zero ΔH_Z , uma diferença de altitude acima do geoide-médio

ΔH_m , e uma diferença, na altitude acima do geoide livre de marés ΔH_n , entre uma estação ao norte e ao sul, são dadas por (EKMAN, 1989):

$$\Delta H_m - \Delta H_z = 29,6 (\sin^2 \varphi_N - \sin^2 \varphi_S), \quad (185)$$

$$\Delta H_z - \Delta H_n = 29,6 (\gamma - 1) (\sin^2 \varphi_N - \sin^2 \varphi_S) \quad (186)$$

e

$$\Delta H_m - \Delta H_n = 29,6 \gamma (\sin^2 \varphi_N - \sin^2 \varphi_S). \quad (187)$$

Onde φ_N e φ_S são as latitudes para os pontos mais a norte e a sul, respectivamente, e γ é uma constante igual a $\gamma \approx 0,68$ (EKMAN, 1989).

De acordo com Mäkinen e Ihde (2008), as altitudes das redes de nivelamento em que os efeitos de marés terrestres não são levados em consideração, estas altitudes são referidas ao geoide médio, ou seja, ao sistema maré média, neste caso, as atuais altitudes disponíveis no Brasil são vinculadas ao sistema maré média. O posicionamento GPS sobre as RNs (ou qualquer outro ponto), quando referidas ao WGS84 estão referidas ao sistema livre de maré e o mesmo pode se dizer para o GRS80. Neste contexto, deve-se compatibilizar os sistemas de marés de todas as grandezas envolvidas.

Para valores de gravidade, as diferenças entre a gravidade maré-zero g_z , com a gravidade maré-média g_m e a gravidade livre de marés g_n são dadas por (EKMAN, 1989):

$$g_m - g_z = -30,4 + 91,2 \sin^2 \varphi, \quad (188)$$

$$g_z - g_n = (\delta - 1) (-30,4 + 91,2 \sin^2 \varphi) \quad (189)$$

e

$$g_m - g_n = \delta (-30,4 + 91,2 \sin^2 \varphi). \quad (190)$$

Sendo δ uma constante arbitrária $\approx 1,53$ (EKMAN, 1989).

As anomalias de gravidade terrestre geralmente são fornecidas em termos do sistema de maré-média. Para cumprir a resolução da IAG (*International Association of Geodesy*) relativas aos modelos de marés, as observações de gravidade devem ser convertidas para o sistema de maré zero, usando a (188). Mais informações sobre o tratamento da maré permanente em gravimetria, sistemas de altitudes e posicionamento GNSS podem ser obtidas em Rapp (1989), Ekman (1989), Poutanen, Vermeer e Mäkinen (1996), Mäkinen (2001), Heck (2004), e outros.

3.2 RELAÇÃO ENTRE A ALTITUDE NORMAL E A ORTOMÉTRICA-NORMAL

A diferença entre H^N e H^{ON} é de interesse particular, uma vez que traz consigo uma incompatibilidade teórica entre a referência para as altitudes ortométricas-normal e modelos gravimétricos do quase geoide. Na Figura 5 é possível notar a relação entre a altitude normal e a ortométrica-normal. Partindo das relações (29) e (33) pode-se escrever a diferença:

$$H^N - H^{ON} = \frac{C}{\bar{\gamma}(H^N, \varphi)} - \frac{C'}{\bar{\gamma}(H^{ON}, \varphi)}. \quad (191)$$

Se considerado que $\bar{\gamma}(H^N, \varphi) \approx \bar{\gamma}(H^{ON}, \varphi)$, tem-se:

$$H^N - H^{ON} = \frac{C - C'}{\bar{\gamma}(H^{ON}, \varphi)}. \quad (192)$$

Tendo em vista a projeção de Pizzetti na Figura 5, nota-se o ponto R sobre o quase geoide em que existe uma particular esferopotencial, U_R , que passa por este ponto. Pode-se então escrever de imediato que $\delta U = U_{ref} - U_R$, ficando então para a (192):

$$H^N - H^{ON} = \frac{\delta U}{\bar{\gamma}(H^{ON}, \varphi)}. \quad (193)$$

Naturalmente, a condição necessária para a (193) é que $W_0 = U_0$ e mostra que as altitudes do tipo normal e ortométrica-normal não são coincidentes e que a diferença depende do termo δU .

Normalmente, quando da aplicação da correção ortométrica-normal, por exemplo, a correção dada pela (38), tem-se diferentes versões para a mesma. Estas diferentes versões relacionam-se a diferentes referências; pormenores são dados em Bomford (1971). Caso seja fixado um dado U_{ref} , para um particular *datum* vertical, torna-se fácil avaliar o termo δU , considerando que o campo de gravidade normal e o potencial de gravidade normal U e todas as suas derivadas podem ser conhecidos para o espaço exterior ao elipsoide de referência. Entretanto, na prática, a referência zero é difícil de ser definida, e a mesma não é compatível com o modelo do quase geoide ou geoide.

Esta distinção é importante para os usuários que pretendem usar altitudes derivadas do posicionamento GPS associadas com modelos gravimétricos do quase geoide. Estes irão perceber diferenças no nível do centímetro, sobretudo em regiões montanhosas. Estas diferenças não são necessariamente associadas com erros do modelo do quase geoide (ou geoide) e sim referenciais distintos entre si. Filmer, Featherstone e Kuhn (2010) apresentam estas discrepâncias sobre todo o território australiano, com base em valores da gravidade derivada do *Earth Gravity Model* 2008, EGM2008 (PAVLIS et al., 2008), sobre as RNs do Sistema de Altitudes Australiano. A diferença máxima entre H^N e H^{ON} encon-

trada por estes autores é de aproximadamente 18 cm para o sudeste do país (montanhas com aproximadamente 2000 m de elevação), porém, de 2-3 cm sobre a maior parte da Austrália.

Para a atual situação do Brasil em que desníveis ortométricos-normal foram determinados ao longo dos circuitos de nivelamento, torna-se fácil convertê-los em desníveis normais, ou seja, diferença de altitude ortométrica-normal entre dois pontos em diferença de altitude normal entre estes. No intuito de calcular altitude normal, pode-se escrever uma equação mais conveniente a partir da (29) como:

$$H_P^N = \int_0^P dn + \int_0^P \frac{\gamma - \bar{\gamma}_P}{\bar{\gamma}_P} dn + \int_0^P \frac{g - \bar{\gamma}_P}{\bar{\gamma}_P} dn. \quad (194)$$

As duas últimas integrais do lado direito da (194) são equivalentes à correção normal (NC). A mesma ideia pode ser aplicada na (33), desta forma uma conveniente equação para a altitude ortométrica-normal é dada como:

$$H_P^{ON} = \int_0^P dn + \int_0^P \frac{\gamma - \bar{\gamma}_P}{\bar{\gamma}_P} dn. \quad (195)$$

O segundo termo do lado direito da (195) é a correção para o não paralelismo das superfícies de nível da Terra normal.

A diferença entre a (194) e a (195) é:

$$H_P^N - H_P^{ON} = \frac{1}{\bar{\gamma}_P} \int_0^P (g - \gamma) dn = \frac{1}{\bar{\gamma}_P} \int_0^P \delta g dn \quad (196)$$

quod erat demonstrandum. O integrando δg é o distúrbio de gravidade calculado de acordo com a (86). Objetivando-se ajustar a rede em termos de desníveis normais, pode-se empregar, *ad hoc*, a diferença entre estes desníveis da seguinte forma segundo Wolf (1974):

$$(H_B^N - H_A^N) = (H_B^{ON} - H_A^{ON}) + \sum_A^B \frac{g - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} \Delta n_{AB}. \quad (197)$$

No entanto, é necessário mostrar que esta diferença pode ser considerada holonômica, assim como os números geopotenciais os são.

Uma dedução mais rigorosa pode ser formulada como segue: Considere o desnível

vel dinâmico, ΔH_{AB}^D , entre dois pontos dado como:

$$\begin{aligned}\Delta H_{AB}^D &= H_B^D - H_A^D = \frac{1}{\gamma_{45^\circ}}(C_B - C_A) = \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} \int_A^B g dn \\ &= \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} \int_A^B (g - \gamma_{45^\circ} + \gamma_{45^\circ}) dn = \int_A^B dn + \int_A^B \frac{g - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} dn.\end{aligned}\quad (198)$$

Considere agora um desnível dinâmico relativo à Terra normal, ΔH_{AB}^{DN} , entre dois pontos como:

$$\begin{aligned}\Delta H_{AB}^{DN} &= H_B^{DN} - H_A^{DN} = \frac{1}{\gamma_{45^\circ}}(C'_B - C'_A) = \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} \int_A^B \gamma dn \\ &= \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} \int_A^B (\gamma - \gamma_{45^\circ} + \gamma_{45^\circ}) dn = \int_A^B dn + \int_A^B \frac{\gamma - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} dn.\end{aligned}\quad (199)$$

Efetutando a diferença:

$$\begin{aligned}\Delta H_{AB}^D - \Delta H_{AB}^{DN} &= \left[\int_A^B dn + \int_A^B \frac{g - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} dn \right] - \left[\int_A^B dn + \int_A^B \frac{\gamma - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} dn \right] \\ &= \int_A^B \frac{g - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} dn - \int_A^B \frac{\gamma - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} dn \\ &= \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} \int_A^B (g - \gamma) dn = \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} \int_A^B \delta g dn\end{aligned}, \quad (200)$$

ou seja

$$\Delta H_{AB}^D = \Delta H_{AB}^{DN} + \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} \sum_A^B \delta g \Delta n_{AB}. \quad (201)$$

A correção dinâmica também pode ser usada para calcular diferenças de números geopotenciais:

$$C_B - C_A = \gamma_{45^\circ} \Delta H_{AB}^D, \quad (202)$$

sendo assim, pode-se reescrever a (202) com o auxílio da (201) como:

$$C_B - C_A = \gamma_{45^\circ} \Delta H_{AB}^{DN} + \sum_A^B \delta g \Delta n_{AB}. \quad (203)$$

Na medida em que $g - \gamma_{45^\circ}$ não seja nula na (198), um erro de 10 mGal em g provoca um erro de 1 mm em 100 metros de desnível geométrico.

De acordo com a (203) se existe o valor de gravidade g e os desníveis Δn , qual o por que de não se ajustar em termos de números geopotenciais? A resposta é simples para o caso brasileiro: Não existe o valor de g associado a Δn , e as poucas RNs que existem não podem ser reocupadas com gravímetros para solucionar este problema. A opção rápida e coerente é explorar base de dados gravimétricos e usar de interpolação

sobres as RNs, muito embora estas, talvez, existam somente em base de dados por conta de terem sido destruídas e/ou removidas, no entanto a informação posicional existe.

3.3 POR QUE MODERNIZAR A RAFB?

Os *data* verticais existentes no Brasil podem ser caracterizados como díspares. As redes de nivelamento são, relativamente, densa em regiões povoadas (litoral) e muito esparsa nas áreas desabitadas (*cf.* FIGURA 27). Naturalmente, o nivelamento-base não pode ser facilmente estendido para áreas onde não existem estradas. O nivelamento trigonométrico é capaz de ser usado fora de estradas e pode atingir precisões de ± 2 mm por km, se as linhas de visadas não forem superiores a 300 metros de comprimento (TORGE, 2001, p. 254). Entretanto, linhas de visadas longas podem ser difíceis de alcançar, especialmente em áreas de topografia acidentada onde as estradas não existem, e podem, portanto, fazer o nivelamento trigonométrico demorado assim como o nivelamento geométrico. Portanto, uma diferente abordagem é necessária.

A Modernização do Sistema de Referência Vertical (Modernização de Altitudes) é um projeto do IBGE para o desenvolvimento, implementação e promoção de um sistema de altitude baseado em valores de gravidade para o Brasil. Em outras palavras, é o ajustamento dos desníveis associando-se aos mesmos valores de gravidade. No entanto, um sistema de altitudes moderno, é mais do que simplesmente ajustar uma rede altimétrica no sistema de altitude holonômico; é a realização de um novo *datum* vertical para o Brasil bem como da modelagem do geoide (ou quase geoide) para que os usuários de GPS possam, em vez de nivelamento empregando-se técnicas obsoletas, determinar altitudes físicas.

Uma das etapas da modernização do sistema de altitudes vem sendo realizada pelo IBGE, tratando-se da determinação dos valores de gravidade sobre as RNs. Na Figura 30 pode-se observar a distribuição das informações de gravidade sobre os macro circuitos da rede, fornecendo condições para que o Brasil tenha altitudes com significado físico, ou seja, condições de se calcular altitudes normais, ortométricas e dinâmicas conforme a necessidade do usuário. Outra etapa, deve ser o aperfeiçoamento do modelo geoidal (ou quase geoidal) com base nas mais recentes teorias bem como o levantamento de informações gravimétricas (terrestre, aérea, marítima e espacial) e modelos digitais de elevações.

Um sistema de altitudes moderno permite a determinação de altitudes em relação ao *datum* vertical em todos os lugares de um país empregando-se o GPS, ou técnicas emergentes da tecnologia GNSS. Esta nova abordagem permitirá a redução da dependência de redes monumentadas referenciando as altitudes. Isso irá reduzir a manutenção

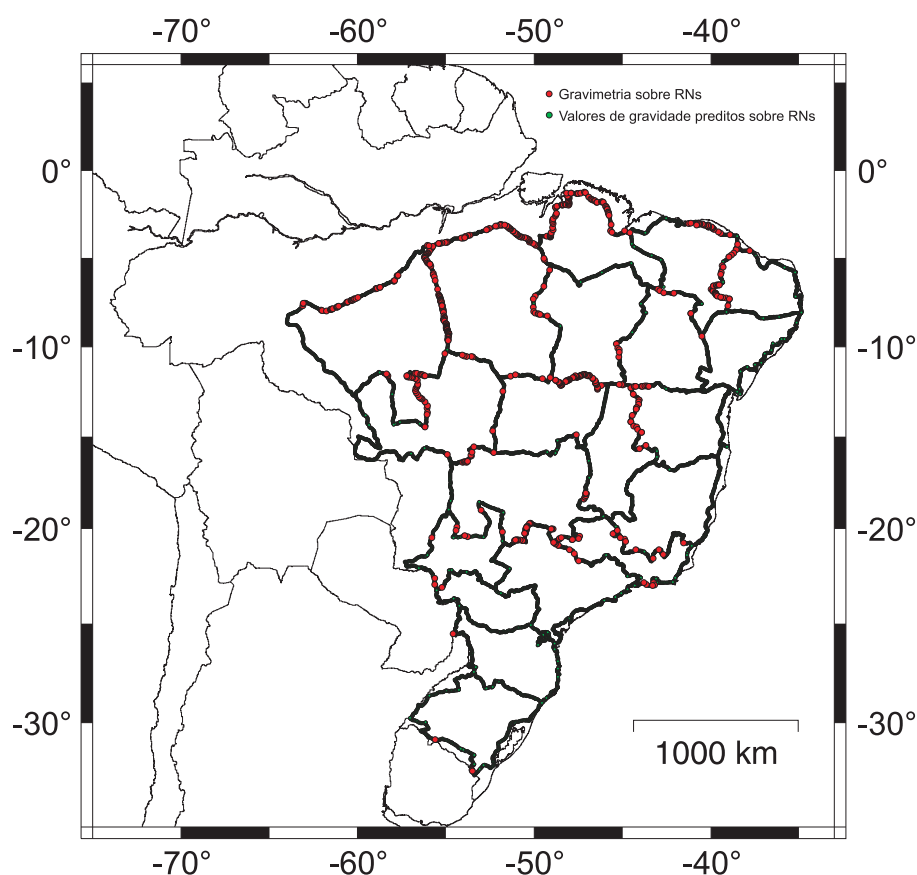


Figura 30 - Levantamentos gravimétricos sobre a RAFB

Fonte: O autor

Nota: Os círculos em vermelho são as RNs em que o valor da gravidade foram observados diretamente e os em verde são as RNs que tiveram os valores de gravidade determinados por interpolação.

física das RNs, atualmente cerca de 63.000 RNs, para um número reduzido de estações. Muito embora, estas poucas estações possam ser densificadas conforme a necessidade.

Há, portanto, duas abordagens principais que podem ser usadas para definir um novo *datum* vertical para o Brasil, a saber: Fazer um novo ajustamento combinado das redes precisas de nivelamento com gravidade ou definir um quase geoide gravimétrico que pode ser usado como a superfície de referência vertical. Em suma, se a abordagem do (quase) geoide for escolhida para o estabelecimento de um novo *datum* vertical, embora o seu cálculo possa ser afetados por erros de omissão e comissão nos dados de gravidade, fornece-se uma referência única para o Brasil e os usuários de receptores podem vincular as suas observações ao *datum* vertical.

Esta abordagem permite que todos os pontos tenham altitudes oficiais tanto em termos de DVB e um elipsoide (ou seja, em termos de SIRGAS2000). Para possibilitar a transformação das altitudes dos dois *data* verticais ora em vigência no país, um des-

locamento adicional também terá de ser utilizado com o geoide ou quase geoide. Esta abordagem permitirá o uso continuado do DVB pelos usuários e permitirá a utilização de posicionamento GPS com a rede altimétrica oficial. Para assegurar que a relação entre o sistema de altitudes do Brasil e qualquer SGA futuro, observações do valor de gravidade absoluta devem ser realizadas em um (ou mais) pontos e as redes de monitoramento contínuos GNSS devem fazer parte da RAFB.

A abordagem de se ter um modelo geoidal ou quase geoidal para o país fornece condições de se vincular o DVB a um SGA usando as seguintes estratégias propostas por Idhe (2009):

- Observações GPS:

$$C(\phi_P, \lambda_P, h_P) = W_0 - W(\phi_P, \lambda_P, h_P), \quad (204)$$

$$W(\phi_P, \lambda_P, h_P) = U(\phi_P, \lambda_P, h_P) + T(\phi_P, \lambda_P, h_P), \quad (205)$$

e

- Nivelamento:

$$C(\phi_P, \lambda_P, h_P) = C^j(\phi_P, \lambda_P, h_P) + W_0 - W_0^j, \quad (206)$$

por isso, $C^j(\phi_P, \lambda_P, h_P)$ é transformado a partir da superfície de nível regional W_0^j para um nível global W_0 .

A diferença $W_0 - W_0^j$ pode ser determinada por GPS sobre RNs em pontos de localização pré-selecionados, como:

$$\delta W = W_0 - T(\phi_P, \lambda_P, h_P) - U(\phi_P, \lambda_P, h_P) - C^j(\phi_P, \lambda_P, h_P). \quad (207)$$

O objetivo principal é determinar o distúrbio do potencial pelo PVCG e sua relação com o número geopotencial. No entanto, é necessário determinar o distúrbio do potencial sobre a superfície terrestre e o número geopotencial é dado por:

$$C^j(\phi_P, \lambda_P, h_P) = W_0^j - T(\phi_P, \lambda_P, h_P) - U(\phi_P, \lambda_P, h_P). \quad (208)$$

O campo de gravidade normal para o elipsoide de referência é definido pela teoria de Somigliana-Pizzetti (PIZZETTI, 1894) e (SOMIGLIANA, 1930), e o potencial de gravidade normal U e todas as suas derivadas podem ser consideradas como conhecidos para o espaço exterior ao elipsoide de referência. O potencial de gravidade normal pode ser determinado em qualquer ponto acima do elipsoide de referência a partir da expansão em

série de Taylor como:

$$U_P = U_0 + \frac{\partial U}{\partial h} h_P + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial h^2} h_P^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial h^3} h_P^3 + \mathcal{O}(h_P^4) \quad (209)$$

onde $\frac{\partial}{\partial h}$ é operador gradiente na direção da normal. O W_0^j foi estimado para o *Datum* Vertical Brasileiro (DVB) por Ferreira (2008, p. 89) com base no EGM96, com o valor de $W_0^j = 62.636.858,15 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$.

Como resultado desta abordagem, determina-se altitudes físicas ou números geopotenciais para um geoide que está relacionado com uma convencional superfície de nível zero do potencial do campo de gravidade da Terra W_0 . É importante mencionar que quando comparado, o segundo PVCG com o terceiro PVCG, segundo a solução de Molodenskii, o segundo PVCG tem duas vantagens principais. Em primeiro lugar, a sua solução contém os termos de primeira ordem do desenvolvimento da série em harmônicos esférico, o que significa que o centro de massa da Terra pode ser derivado a partir dele, sendo interessante do ponto de vista físico. Em segundo lugar, porque a forma da superfície terrestre pode ser determinada diretamente a partir de dados de posicionamento GPS, evitando dificuldades operacionais a partir de bases diferentes de altitudes no PVCG de Molodenskii escalar livre.

Como exemplos de aplicações do PVCG de Molodenskii escalar livre e do PVCG fixado em conexões de *data* verticais relatam-se duas experiências nos dois tópicos seguintes:

- Amos (2007) determinou um quase geoide para a Nova Zelândia empregando dados gravimétricos relacionados a diversos *data* verticais. Segundo o autor, a solução empregada baseou-se em um processo iterativo. Ele aplicou o deslocamento vertical entre os *data* locais (13 *data* com base no nível médio do mar local para 12 marégrafos) e o quase geoide regional preliminar para o cálculo de novas anomalias de gravidade. Este processo continuou até atingir uma dada tolerância fixada pelo mesmo, não sendo necessário mais que três iterações.
- Alternativa interessante e coerente para a unificação de *data* verticais é fornecida pelo PVCG fixado. Um exemplo de uma aplicação bem sucedida neste contexto pode ser encontrado em Zhang et al. (2009). Estes autores unificaram os sistemas de altitudes entre a Ilha de Hong Kong e a província de Shenzhen na China. Segundo os mesmos, este novo método é consistente em poucos centímetros quando comparado com outros dados. As diferenças encontradas em duas campanhas de nivelamentos foram de 0,873 m e 0,835 m e empregando-se o PVCG fixado $0,897 \pm 0,064 \text{ m}$.

Diante deste contexto, pergunta-se: Qual o problema em conectar o *Datum* Vertical da sub-rede de Santana ao *Datum* Vertical de Imbituba?

3.4 CONSIDERAÇÕES PRÁTICO-TEÓRICAS

Segundo Moritz (1980, p. 221) existem, essencialmente, duas possíveis abordagens para a Geodésia Física na determinação do campo de gravidade, sendo elas: *abordagem do modelo* e a *abordagem operacional*. A primeira inicia-se na teoria, a segunda nas observações. A *abordagem do modelo*, nesta tese, é seguida pelo modelo matemático para a solução do PVCG do ponto de vista de Brovar, porém, com o PVCG fixado. No entanto, o modelo seleciona os seus dados, que, neste caso são distúrbios de gravidade. Todavia, a maioria das observações disponíveis para a determinação do campo de gravidade são, dentre outras¹⁶, anomalias de gravidade. A questão que surge é: Como combinar todos estes dados da melhor maneira possível? Esta é a *abordagem operacional*.

No contexto da *abordagem operacional* um problema prático é como abordar a solução para o PVCG em um cenário real relacionado com uma pobre distribuição de informações gravimétricas, como usualmente o é para os países da América do Sul. Os problemas relacionados à distribuição de dados gravimétricos, no contexto do PVCG para a América do Sul, podem ser encontrados em: Blitzkow (1996, capítulo 4); Sá (2004, seção 5.2); Lobianco (2005, seção 4.1); e, mais recentemente em Blitzkow et al. (2009). Outro aspecto importante é como utilizar informações gravimétricas obtidas sem o posicionamento GPS para a solução do problema fixado, pois reocupar todos estes pontos com o GPS é impossível e, quando possível, inviável. Este problema foi enfrentado por Martin Hotine em 1968, que formulou o seguinte texto, em uma época em que h era de difícil obtenção:

Se o distúrbio de gravidade é usado, algum procedimento iterativo, começando com valores aproximados de altitude elipsoidal, pode ser necessário; e pode, provavelmente, requerer cálculos adicionais do que com o uso de anomalias de gravidade; não é certo que o tal procedimento possa convergir, porém, isto não tem sido plenamente investigado ainda (1968). (HOTINE, 1969, p. 314).

De tal modo que a questão abordada aqui pode ser formulada da seguinte forma:

$$\Delta g(\varphi, \lambda, H^N) \stackrel{?}{\rightleftharpoons} \delta g(\varphi, \lambda, h), \quad (210)$$

como converter anomalias de gravidade em distúrbios de gravidade? Note que a relação direta entre Δg e δg , considerado os mesmos sistemas de referência, se dá em função de H^N e h que, no entendimento de Martin Hotine pode-se tentar um processo iterativo para a

¹⁶ Deflexão da vertical, diferença de potencial.

determinação de h no lado direito da (210). Entretanto, há a necessidade de um modelo *a priori* para ζ , e, a partir deste, busca-se refiná-lo a cada etapa da iteração. O problema no uso de Δg está na componente H^N , que por seu turno é inerente ao *datum* vertical local, *i.e.*, converter anomalias de gravidade em distúrbios de gravidade, adequadamente, é um problema em aberto.

Problemas relativos ao uso da anomalia de gravidade foram evidenciados por Heck (1990), como segue:

As anomalias de gravidade terrestre ar-livre formam uma essencial fonte de dados no âmbito da determinação do campo de gravidade. Anomalias de gravidade dependem dos *data* gravimétrico, das redes verticais e horizontais, bem como da definição de um campo de gravidade normal, assim, dados de anomalia de gravidade são afetados de forma sistemática por inconsistências de *data* locais com relação a um *datum* global de sistema de altitudes. Esses erros sistemáticos nos dados de anomalia de gravidade ar-livre causam efeitos sistemáticos em quantidades relacionadas ao campo de gravidade, como por exemplo, alturas geoidais absolutas e relativas ou anomalias de altitude calculadas a partir de anomalia de gravidade. (HECK, 1990, p. 88).

Ao empregar a técnica da decomposição espectral, aonde subtraem-se os longos comprimentos de onda das anomalias de gravidade observadas, existe uma contaminação no domínio das ondas que acaba sendo tratado como resíduos espectrais. Essa contaminação deve-se, principalmente, devido a inconsistências entre os *data* verticais para as anomalias de gravidade global e local. Esse problema se intensifica em um país com as dimensões como as do Brasil, em que dados de gravidade de diversos países contíguos são empregados com seus diferentes *data* verticais. Problema este, que não se observa para o caso dos distúrbios de gravidade, pois todas as informações podem ser referidas ao mesmo Sistema Geodésico de Referência (SGR).

Além do problema concernente ao *datum* vertical, ao qual a anomalia de gravidade se vincula, existe o problema da qualidade associada ao posicionamento horizontal e vertical, pois, toda observação gravimétrica deve ser acompanhada de informação relativa à posição e o tempo. A maioria dos levantamentos gravimétricos é para propósitos geofísicos e nem sempre apresentam todas as qualidades exigidas para fins geodésicos. Neste contexto, Sansò (1995) apresenta uma completa revisão sobre este tópico no contexto do PVCG. Com relação à precisão e resolução almejada para as observações gravimétricas o posicionamento do ponto de observação deve ser feito com poucos metros de precisão horizontal e apenas alguns centímetros na direção vertical.

O restante desta tese apresenta uma metodologia com base no PVCG fixado para o cálculo de um modelo representativo do distúrbio do potencial, que é essencial para implementar esta proposta de *datum* vertical. A única questão que ocorre no Brasil é que

os conjuntos de dados de entrada (anomalias de gravidade) se relacionam com diferentes *data* verticais, este aspecto é tratado em abordagem de cálculo iterativo discutido mais adiante na seção 4.6.

3.5 GEOIDE OU QUASE GEOIDE PARA O BRASIL?

No processo de modernização da RAFB não definiu-se qual a superfície de referência para as altitudes no Brasil, porém o senso comum foi a adoção de números geopotenciais (sistema de altitudes holonômico). Para a região Sul-americana, pode-se visualizar no domínio do espaço a magnitude da separação entre o geoide e o quase geoide, $(\zeta - N)$, na Figura 31.

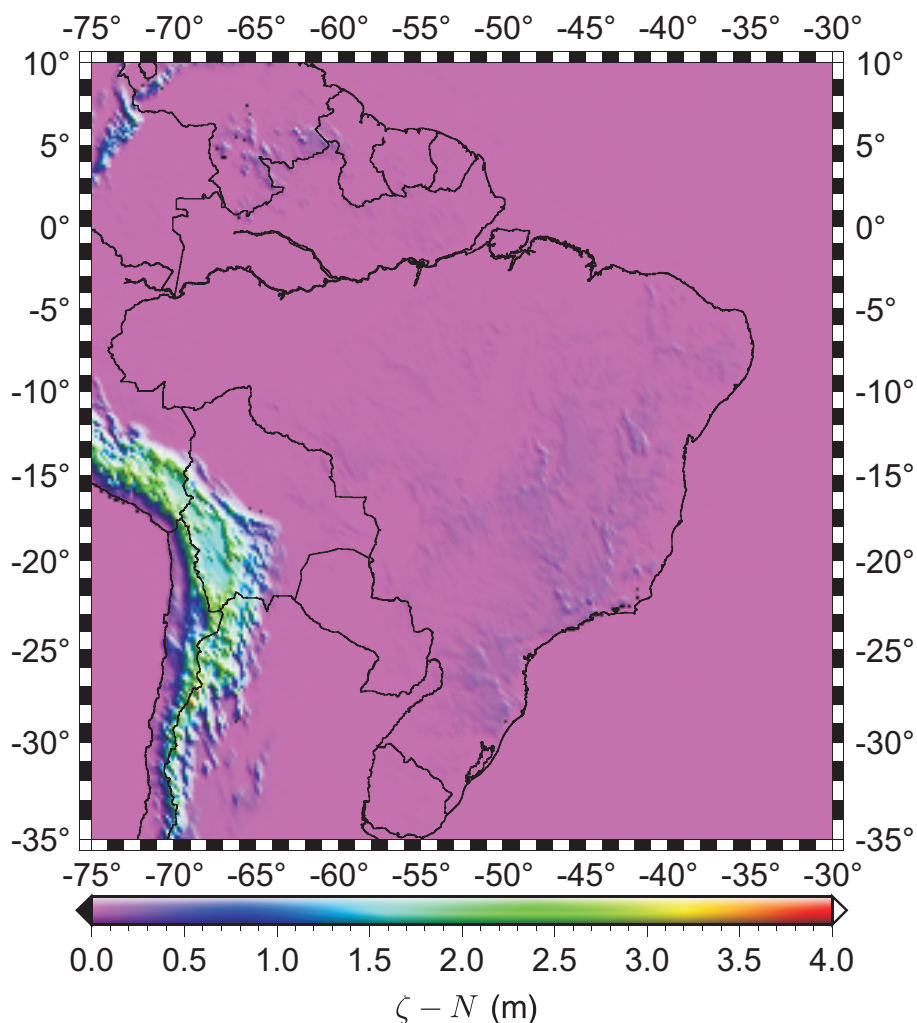


Figura 31 - Da separação entre o quase geoide e o geoide para o Brasil

Fonte: O autor

Nota: Valores calculados com base nos coeficientes de transformação de anomalia de altitude em altura geoidal do EGM2008.

Como visto na seção 2.1, o desnível normal, assim como o ortométrico e o dinâmico, se devidamente corrigidos os desníveis geométricos, podem ser empregados diretamente no ajustamento sem a necessidade de se determinar números geopotenciais *a priori*. Quando se trata de altitude ortométrica, como visto, a superfície de referência é o geóide, que em linhas gerais pode ser considerado como uma particular superfície equipotencial do campo de gravidade que se ajusta à superfície dos oceanos de uma forma *ótima*¹⁷ (permanece-se fiel a definição de Gauss). Quando se tenta explicar ao leigo o significado de altitude, o conceito mais simples é o de altitude ortométrica, ou seja, a distância de um dado ponto em consideração até o “nível médio do mar”. Porém, a sua realização prática é difícil e não é de senso comum entre os diversos pesquisadores, por exemplo: Helmert (1890); Niethammer (1932); Mader (1954); Allister e Featherstone (2001); Hwang e Hsiao (2003); Tenzer, Vaníček e Santos (2003); Santos et al. (2006); entre outros.

Não é o objetivo desta tese confrontar as diferentes altitudes e decidir qual é a melhor e a pior. Cada uma tem suas propriedades e são de grande importância prática e teórica. Por exemplo, a altitude dinâmica serve muito bem para materializar uma superfície equipotencial, para demarcar uma cota de inundação, ou garantir que um trilho de metrô, ou trem, esteja em nível (sobre uma equipotencial). A altitude ortométrica para trabalhos oceanográficos, por exemplo, são importantes para gerar modelos hidrodinâmicos de corpos d’água; no entanto, em sua grande maioria estes trabalhos são em zonas costeiras, próximo ao nível médio do mar. Para a Geofísica, por exemplo, o geóide como uma representação do campo de gravidade revela a distribuição de massas. Todavia, como visto na Figura 31, converter o quase geóide em geóide é uma tarefa relativamente simples *vide* equação (45).

Como visto no capítulo anterior, no oceano a altitude ortométrica se confunde com a normal, ou seja, $H^O = H^N$. Pequenas diferenças podem ser notadas na Figura 31 para o caso da América do Sul, as maiores são na região andina. Para grandes projetos de engenharia, por exemplo, grandes túneis, é um consenso comum utilizar os valores medidos da gravidade para a conversão dos desníveis geométricos em altitudes ortométricas. No entanto, é frequente, devido à ausência de dados de gravidade, os desníveis geométricos sem qualquer tratamento relativo ao campo de gravidade serem empregados. E, diga-se de passagem, a Engenharia no Brasil por décadas tem utilizado o atual sistema vigente no país, ortométrico-normal. É interessante que não existem relatos na literatura sobre problemas quando os desníveis geométricos tão somente foram utilizados ao invés de altitudes ortométricas. Em muitas aplicações práticas, somente desníveis geométricos tem atendido

¹⁷ Na prática, a separação média entre o geóide e a superfície média dos oceanos é zero.

a demanda dos Engenheiros. O exemplo mais nobre que alguém pode dar sobre o uso de altitudes é o escoamento de líquidos, de modo geral, água, seja por conduto forçado ou livre. Para projetos de engenharia, o sistema de altitudes empregado deve descrever o fluxo de água, ou seja, uma superfície equipotencial deve ter um único valor de altitude apenas. Não existe um tipo de altitude que atenda simultaneamente uma interpretação geométrica e física, pois os dois conceitos são incompatíveis devido ao não paralelismo das superfícies equipotenciais do campo de gravidade terrestre.

Além disso, nem ortométricas nem normais têm “significado físico” sobre a correta descrição do comportamento físico dos fluídos. A única exceção está correta ao nível do mar, onde as duas altitudes são iguais a zero. Além disso, uma diferença de altitude normal, ou altitude ortométrica, negativa entre os pontos A e B não é garantia de que o fluido escoará de A para B . (VANÍČEK et al., 2003, p. 84).

Não obstante, existe uma classe de usuários de altitudes que precisam de uma altitude com conotação física como a normal ou a ortométrica diante das novas missões por satélites, por exemplo, para conectar os seus trabalhos referidos em um contexto local a um contexto global. Se ambas atendem a demanda de todos os usuários por que não usar a altitude normal? Que pode ser facilmente transformada em altitude ortométrica a medida que o conhecimento nesta área for avançando, como tem se visto desde Helmert até hoje. Além do que na atual condição brasileira, os desníveis ortométricos-normal podem ser facilmente convertidos em desníveis normais e o ajustamento pode ser realizado através destes últimos que atendem o conceito holonômico. A altitude normal desde que foi formulada por Molodenskii em 1945, não sofreu alterações do ponto de vista conceitual e, por conseguinte, realizações práticas da mesma são iguais em qualquer parte da Terra, o que elimina incompatibilidade entre os sistemas quando da unificação a um SGA (se considerado o mesmo SGR).

A superfície de referência vertical deve ser uma função do tempo, junto com isso, deve-se ter em mente que o quase geoide, também o geoide, não permanecem fixos no tempo. Segundo Vaníček et al. (2003), assim como o valor de gravidade muda com o tempo, o quase geoide (geoide) também deve mudar. A verdade, é que esta é uma mudança real e não uma mudança em resposta à evolução do conhecimento, mas qual é a diferença? (VANÍČEK et al., 2003, p. 84). A resposta em termos simples pode ser formulada, por exemplo, no contexto da conexão de redes verticais. Se não há consenso em uma metodologia para o cálculo de altitudes ortométricas, o emprego das mesmas torna a conexão de redes verticais inconsistente devido a tratamento diferenciado quando do cálculo das altitudes.

Como visto na Figura 30, existem alguns pontos com valores de gravidade observados diretamente sobre as linhas de nivelamento da RAFB, porém estes pontos são

somente de novas estações implantadas, ou seja, novas linhas de nivelamento. As linhas mais antigas, com a maioria das RNs destruídas e/ou deslocadas de sua posição original, não podem ser mais ocupadas com gravímetros. Outro aspecto importante é que renivelar todo o país é moroso e caro, não sendo recomendado aos cofres públicos. Porém, pode-se aplicar a equação de condição:

$$\int_{\Gamma} dH^{ON} + \frac{1}{\bar{\gamma}} \int_{\Gamma} \delta g dn = 0. \quad (211)$$

para o ajustamento dos circuitos da RAFB, o integrando δg na segunda integral é facilmente obtido através de técnicas de interpolação empregando-se estações gravimétricas vizinhas. Esta expressão, em termos de interpolação do valor de g , possui uma vantagem em relação à aplicação da (10), pois erros de interpolação sobre o valor de g na (211) influencia menos que na (10). O esforço da autoridade competente pelo mapeamento e definição de sistemas de referências para o Brasil pode ser concentrado em posicionar as RNs remanescentes e densificação de gravimetria sobre todo o território nacional, e dos vizinhos quando possível, associado à altitude elipsoidal, para que seja possível a determinação de um modelo quase geoidal de alta resolução para o Brasil.

4 REFINAMENTOS PARA A SOLUÇÃO DO TIPO BROVAR

4.1 O PROBLEMA DE CONTORNO FIXADO: LINEARIZAÇÃO E APROXIMAÇÃO ESFÉRICA

Dependendo do conhecimento que se tem sobre a superfície terrestre, têm-se diferentes problemas de contorno para a equação de Laplace conforme Heck (1997). Segundo Heck (1989) em vista das recentes tecnologias de posicionamento de alta precisão por satélites artificiais o Problema de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG) fixado, supondo que a geometria da superfície de contorno é completamente conhecida, adquire cada vez mais relevância prática. Considerando-se que a superfície terrestre S é conhecida tem-se como incógnita o potencial W . Se como condição de contorno utiliza-se o módulo do vetor gravidade g , tem-se então o problema de contorno fixado. Este problema de contorno consiste em determinar o potencial gravitacional V empregando-se:

$$\begin{cases} \Delta V_P = 0 & P \text{ exterior a } S \\ |\nabla(V + \Phi)_P| = g_P & P \text{ sobre } S \\ \lim_{P \rightarrow \infty} V_P = 0 \end{cases}, \quad (212)$$

sendo Φ o potencial centrífugo e ainda $W = V + \Phi$.

Não é um exercício simples resolver a condição de contorno (212) que é um problema não linear de derivada oblíqua. Seguindo Heck (1997), o primeiro passo é a linearização escrevendo-se o potencial W como $W = U + T$ sendo:

$$\begin{aligned} g &= |\nabla W| \\ &= |\nabla(U + T)| \\ &= [\langle \nabla(U + T), \nabla(U + T) \rangle]^{\frac{1}{2}} \\ &= [|\nabla U|^2 + 2 \langle \nabla U, \nabla T \rangle + |\nabla T|^2]^{\frac{1}{2}}, \\ &= \gamma \left[1 + \frac{2}{\gamma^2} \left\langle \frac{\vec{\gamma}}{\gamma}, \nabla T \right\rangle + \frac{1}{\gamma^2} |\nabla T|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (213)$$

em que $\vec{\gamma} = \nabla U$ é o vetor gravidade normal.

Desde já, tem-se assumido que o potencial normal U é uma aproximação suficiente para o potencial real W , o termo em sujeição a raiz quadrada $(1 + x)^{\frac{1}{2}}$ contém quantidades “pequenas” x , $|\vec{x}| \ll 1$, então pode-se aplicar a série binomial. Desprezando

os termos não lineares em T resulta na condição de contorno linearizada:

$$\left\langle \frac{\vec{\gamma}}{\gamma}, \nabla T \right\rangle \Big|_S = \delta \vec{g}. \quad (214)$$

Segundo Heck (1997) o operador de contorno para o PVCG linearizado é idêntico com a derivativa de T na direção do vetor gravidade normal, *i.e.*:

$$\left\langle \frac{\vec{\gamma}}{\gamma}, \nabla T \right\rangle = \frac{\partial T}{\partial \vec{\tau}}, \quad (215)$$

em que:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{\gamma}}{\gamma}, \quad (216)$$

sendo $\vec{\tau}$ o vetor unitário na direção e sentido do vetor gravidade normal.

Segundo Heck (1997), a direção de $\vec{\gamma}$ para o campo de gravidade normal difere ligeiramente da direção radial geocêntrica, no máximo 11 minutos de arco. Por este motivo, é prática comum introduzir uma nova aproximação ao problema linearizado, ou seja, a chamada aproximação esférica substituindo $\partial/\partial\tau$ por $\partial/\partial r$. E por último o problema (212) escreve-se como:

$$\begin{cases} \Delta T_P = 0 & P \text{ exterior a } S \\ \frac{\partial T_P}{\partial r_P} = -\delta g_P & P \text{ sobre } S \\ \lim_{P \rightarrow \infty} T_P = 0 \end{cases}, \quad (217)$$

ou seja, desprezando-se termos não lineares e de ordem $\mathcal{O}(e^2)$ na condição (212).

4.2 A SOLUÇÃO DE BROVAR

Segundo Molodenskii, Eremeev e Yurkina (1962) representa-se T como o distúrbio do potencial para uma camada de superfície e transformada a condição de contorno em uma equação integral. Ou seja, uma equação integral simples pode ser derivada expressando T como potencial para uma camada de superfície infinitamente fina, condensada sobre a superfície terrestre. Com a função auxiliar μ , definida sobre S , que representa a densidade para uma camada de superfície, faz-se (MOLODENSKII; EREMEEV; YURKINA, 1962, p. 118) e (MORITZ, 1980, p. 355):

$$T(P) = \iint_S \frac{\mu(Q)}{\ell(P, Q)} dS(Q), \quad (218)$$

T refere-se ao ponto P , denominado ponto de cálculo, e ℓ é a distância entre P e o elemento de superfície dS (FIGURA 32). A razão de se empregar a (218) é ℓ^{-1} ser harmônica

como uma função para o ponto de cálculo P , satisfazendo a equação de Laplace:

$$\Delta \left(\frac{1}{\ell} \right) = 0, \quad (219)$$

no exterior à S . Segue que:

$$\Delta T = \iint_S \mu \Delta (\ell^{-1}) dS = 0, \quad (220)$$

provando que de fato T é harmônico no exterior à S .

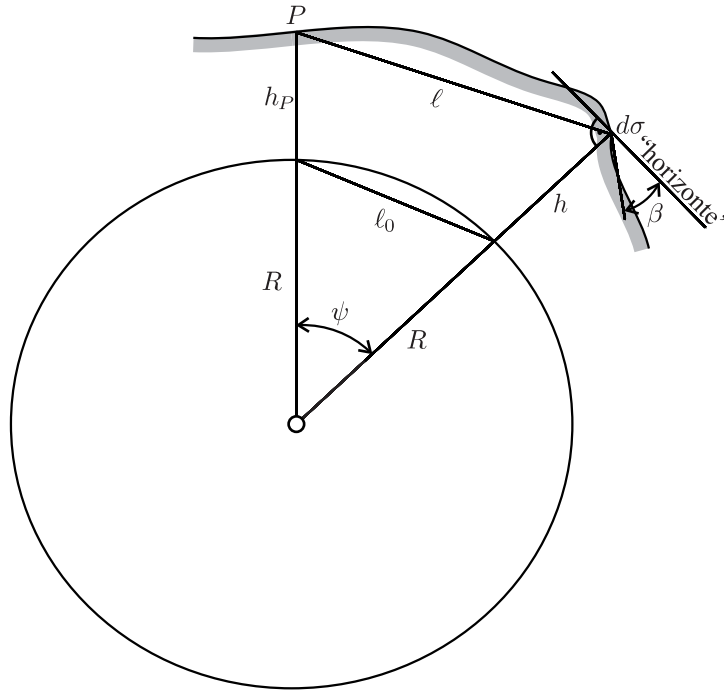


Figura 32 - A geometria para a solução de Molodenskii e Brovar

Fonte: O autor

Desde já, o potencial para uma camada de superfície é harmônico no exterior de S , a equação de Laplace (219) é automaticamente satisfeita. Entretanto, pode-se substituir a (220) dentro da condição de contorno (88), assim tem-se no exterior de S :

$$\frac{\partial T}{\partial r_P} = \iint_S \mu \frac{\partial (\ell^{-1})}{\partial r_P} dS. \quad (221)$$

Mas esta equação não é mais válida sobre S desde que as derivadas para o potencial da camada de superfície são descontínuas na superfície. Ao contrário, tem-se sobre S

$$\frac{\partial T}{\partial r_P} = -2\pi\mu_P \cos \beta_P + \iint_S \mu \frac{\partial (\ell^{-1})}{\partial r_P} dS, \quad (222)$$

de acordo com a equação (1-19a) dada em Heiskanen e Moritz (1967, p. 6). Nestas condições a (88) fornece:

$$2\pi\mu \cos \beta - \iint_S \mu \frac{\partial (\ell^{-1})}{\partial r_P} dS = \delta g. \quad (223)$$

Lembrando que o elipsoide de referência é formalmente considerado uma esfera (FIGURA 32), pode-se então escrever:

$$r_P = R + h_P, \quad (224)$$

$$r = R + h, \quad (225)$$

onde h é a altitude elipsoidal etem-se ainda:

$$\ell = \sqrt{r_P^2 + r^2 - 2r_P r \cos \psi}, \quad (226)$$

derivando a mesma chega-se a:

$$\frac{\partial (\ell^{-1})}{\partial r_P} = -\frac{r_P - r \cos \psi}{\ell^3}. \quad (227)$$

Originalmente a solução de Brovar foi aplicada para o PVCG livre (BROVAR, 1964) e (MORITZ, 1980). O PVCG fixo em aproximação esférica tem sido investigado por Brovar (1972) e Stock (1983), enquanto as fórmulas para o caso especial de uma superfície esférica (Problema de Neumann Exterior para a esfera) têm sido apresentadas por Hotine (1969) e Grafarend, Heck e Knickmeyer (1985).

A ideia básica de V. V. Brovar foi substituir ℓ^{-1} por outra função harmônica E (BROVAR, 1964, p.167) chegando-se a:

$$T = \iint_S \lambda E dS, \quad (228)$$

para a (218). Segundo Moritz (1980) isso é possível, desde que T seja harmônica se E for, pelo mesmo argumento que ℓ^{-1} . Pode-se aceitar a integral (228) como o potencial para uma camada de superfície qualquer, e aceitando a função λ definida sobre S como uma densidade de superfície generalizada.

Quando, para o ponto P fora da superfície S , tem-se pela (88):

$$\delta g_P = -\frac{\partial T}{\partial r_P} = \iint_S \lambda \left(-\frac{\partial E}{\partial r_P} \right) dS. \quad (229)$$

A função E pode ser selecionada em cada direção que o núcleo

$$K = -\frac{\partial E}{\partial r_P}, \quad (230)$$

tem uma conveniente forma. Tem-se então para a (229):

$$-\frac{\partial T}{\partial r_P} = \iint_S \lambda K dS. \quad (231)$$

A princípio fazendo-se:

$$E = \frac{1}{\ell}, \quad (232)$$

tem-se de acordo com a (230)

$$K = -\frac{\partial}{\partial r_P} \left(\frac{1}{\ell} \right) = -\frac{1}{2r_P \ell} - \frac{r^2 - r_P^2}{2r_P \ell^3}, \quad (233)$$

que é combinação linear para as funções $\frac{1}{\ell}$ e $\frac{r^2 - r_P^2}{\ell^3}$. Partindo da aproximação esférica para:

$$\frac{1}{\ell} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r_P^{n+1}} P_n(\cos \psi), \quad (234)$$

que é uma função harmônica para o ponto P no espaço. A série (234) continua sendo harmônica quando os termos individuais são multiplicados por coeficientes A_n , contanto que a (234) convirja.

Pode-se então usar a representação:

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{r^n}{r_P^{n+1}} P_n(\cos \psi). \quad (235)$$

Fazendo-se a escolha particular $A_n = \frac{1}{4\pi} \frac{2n+1}{n+1}$ a (235) fornece:

$$E(r, \psi, r_P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} \frac{r^n}{r_P^{n+1}} P_n(\cos \psi). \quad (236)$$

Um caso particular em que $h = h_P = 0$ (ver FIGURA 32) para a equação (236) tem-se

$$E = (4\pi R)^{-1} H(\psi), \quad (237)$$

que nada mais é do que a função de Hotine, *cf.* (HOTINE, 1969, p. 311).

A função generalizada de Hotine é definida como:

$$H(r_P, \psi, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} \left(\frac{r}{r_P} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi), \quad (238)$$

usando a identidade:

$$\frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}, \quad (239)$$

a (238) pode ser escrita na forma:

$$H(r_P, \psi, r) = 2 \left(\frac{r}{r_P} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_P} \right)^n P_n(\cos \psi) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{r}{r_P} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi). \quad (240)$$

Chamando a relação $\frac{r}{r_P}$ de κ e empregando a função geratriz dos Polinômios de Legendre (HOTINE, 1969, p. 310):

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\kappa \cos \psi + \kappa^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n P_n(\cos \psi), \quad (241)$$

esta equação é absolutamente e uniformemente convergente se $\kappa < 1$. Geralmente κ é considerada uma constante, isso porque a equação (241) é válida para todos os valores de $\kappa < 1$, pode-se considerar κ como uma variável independente, então, a equação pode ser diferenciável com relação à κ . Integrando a (241) em relação a κ entre os limites de integração 0 e κ , encontra-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^{n+1}}{n+1} P_n(\cos \psi) = \ln \left(\sqrt{1 - 2\kappa \cos \psi + \kappa^2} + \kappa - \cos \psi \right) - \ln(1 - \cos \psi). \quad (242)$$

Aplicando propriedades dos logaritmos na expressão (242) chega-se facilmente a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^{n+1}}{n+1} P_n(\cos \psi) = \ln \left(\frac{\sqrt{1 - 2\kappa \cos \psi + \kappa^2} + \kappa - \cos \psi}{1 - \cos \psi} \right). \quad (243)$$

Levando a (241) e (243) na (240) tem-se:

$$H(\kappa, \psi) = 2 \frac{\kappa}{\sqrt{1 - 2\kappa \cos \psi + \kappa^2}} - \ln \left(\frac{\sqrt{1 - 2\kappa \cos \psi + \kappa^2} + \kappa - \cos \psi}{1 - \cos \psi} \right). \quad (244)$$

Substituindo $\kappa = \frac{r}{r_P}$ e empregando-se a (226), chega-se a:

$$H(r_P, \psi, r) = \frac{2r}{\ell} - \ln \frac{\ell + r - r_P \cos \psi}{r_P (1 - \cos \psi)}. \quad (245)$$

Retomando a (237) no contexto da (245), tem-se:

$$4\pi r E(r_P, \psi, r) = \frac{2r}{\ell} - \ln \frac{\ell + r - r_P \cos \psi}{r_P (1 - \cos \psi)}, \quad (246)$$

multiplicando ambos os lados da (246) por r^{-1} chega-se a:

$$4\pi E(r_P, \psi, r) = \frac{2}{\ell} - \frac{1}{r} \ln \frac{\ell + r - r_P \cos \psi}{r_P (1 - \cos \psi)}, \quad (247)$$

derivando $E(r_P, \psi, r)$ em relação a r_P tem-se:

$$4\pi \frac{\partial E}{\partial r_P} = \frac{r^2 - r_P^2}{r_P \ell^3}. \quad (248)$$

Por último escreve-se a (230) empregando-se a (248) como:

$$K(r_P, \psi, r) = -\frac{1}{4\pi} \frac{r^2 - r_P^2}{r_P \ell^3}, \quad (249)$$

retomando a (231) e aplicando o núcleo (249) tem-se:

$$-\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \lambda \frac{r^2 - r_P^2}{r_P \ell^3} dS. \quad (250)$$

No exterior a S , em outras palavras, esta fórmula é válida enquanto o ponto P encontra-se fora da superfície S , a razão é porque a principal singularidade da função $H(r_P, \psi, r)$ é o termo $2\ell^{-1}$, como $\ell \rightarrow 0$, de acordo com a (245). A (250) sobre S pode ser escrita como uma integral do segundo tipo (equação integral de Fredholm do segundo tipo):

$$\lambda \cos \beta - \frac{1}{4\pi} \iint_S \lambda \frac{r^2 - r_P^2}{r_P \ell^3} dS = \delta g. \quad (251)$$

Aqui denominada de Integral de Brovar. Dado o núcleo $K(r_P, \psi, r)$ e a função δg , o problema é determinar a função λ . Um procedimento padrão para resolver equação integral de Fredholm do segundo tipo é usar a solução conhecida como série de Liouville-Neumann. Pode-se empregar ainda o Método dos Elementos de Contorno ou o Método dos Elementos Finitos para a avaliação numérica da (251).

Realizando a integração da (250), observando que T deve ser harmônico no exterior de S e regular no infinito, encontra-se:

$$T = \frac{1}{4\pi} \iint_S \lambda \left[\frac{2}{\ell} - \frac{1}{r} \ln \frac{\ell + r - r_P \cos \psi}{r_P (1 - \cos \psi)} \right] dS. \quad (252)$$

As equações (252) e (251) resolvem, de forma geral, o problema. A equação Integral de Brovar para o segundo problema de valor de contorno (251) é essencialmente mais simples que a equação integral de Molodenskii. Note que na equação (251), se a superfície terrestre coincide com uma esfera ($r = r_P = R$), a integral na (251) anula-se, isso não seria o caso se empregada a solução de Molodenskii.

4.3 O DISTÚRBIO DO POTENCIAL

Substituindo a integração sobre a superfície terrestre por uma integração sobre a esfera, porém, considerando ainda as seguintes relações como necessárias:

$$\begin{cases} dS = r^2 \sec \beta d\sigma \\ \mu = \lambda \sec \beta \end{cases}, \quad (253)$$

tem-se para a equação integral de Fredholm do segundo tipo (251):

$$\mu \cos^2 \beta - \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu r^2 \frac{r^2 - r_P^2}{r_P \ell^3} d\sigma = \delta g. \quad (254)$$

Essa equação é rigorosa para o problema simples de Molodenskii, caso fosse empregado o problema livre, exceto pela falta do termo $-\frac{3}{4\pi} \frac{r}{r_P^3} \cos \psi$.

Reescrevendo a (252) aplicando o núcleo $H(r_P, \psi, r)$ dado pela (245):

$$T = \frac{1}{4\pi} \iint_S \lambda H(r_P, \psi, r) dS. \quad (255)$$

Assim, para escrever a equação (255) na seguinte forma:

$$T = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu H(r_P, \psi, r) R^2 d\sigma, \quad (256)$$

empregaram-se as relações fornecidas na (253).

Para $h = 0$, a superfície física coincide com a esfera $r = R$, que conduz a:

$$T_0 = \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \delta g H(R, \psi, R) d\sigma. \quad (257)$$

Desde já $\mu_0 = \delta g$, fácil de ser notado pela (254) sobre a esfera. A definição (238) para a função generalizada de Hotine mostra que:

$$H(R, \psi, R) = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos \psi). \quad (258)$$

A (257) para uma aproximação de ordem zero reduz-se a:

$$T_0 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \delta g H(\psi) d\sigma. \quad (259)$$

Esta é a fórmula de Hotine e é conhecida como solução para o Problema de Neuman para a esfera.

Considerando a diferença

$$\Delta H = H(r_P, \psi, r) - H(R, \psi, R), \quad (260)$$

a substituição da (245) fornece:

$$\Delta H = \frac{2}{\ell} - \frac{2}{\ell_0} + \mathcal{O}(r_P^{-1}) - \mathcal{O}(R^{-1}) + \mathcal{O}\left(\frac{h}{R}\right) - \mathcal{O}(\eta), \quad (261)$$

onde $\mathcal{O}(r_P^{-1})$ e $\mathcal{O}(R^{-1})$ denota os termos que se anulam quando $r_P \rightarrow \infty$, como r_P^{-1} , o termo η é dado por:

$$\eta = \frac{h - h_P}{\ell_0}, \quad (262)$$

e obviamente a relação $\frac{h}{R} < 10^{-3}$.

A aproximação planar é equivalente com a transição formal $R \rightarrow \infty$, $r_P \rightarrow \infty$, e a (261) reduz-se a:

$$\Delta H = \frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell_0}, \quad (263)$$

como uma aproximação planar. Sendo assim a (260) fornece:

$$H(r_P, \psi, r) = \frac{1}{R} H(R, \psi, R) + \frac{2}{\ell} - \frac{2}{\ell_0}. \quad (264)$$

O potencial T é dado por (252), a qual pode ser expandida em séries em função de certo parâmetro k . Segundo (MORITZ, 1980, p. 374):

$$\frac{2}{\ell} - \frac{2}{\ell_0} = \frac{2}{\ell_0} \sum_{r=1}^{\infty} a_r k^{2r} \eta^{2r}. \quad (265)$$

Substituindo a (265) na (264) e levando na (256) tem-se:

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu \left[H(\psi) + \frac{2R}{\ell_0} \sum_{r=1}^{\infty} a_r k^{2r} \eta^{2r} \right] d\sigma, \quad (266)$$

expandindo a função μ em série

$$\mu = \sum_{p=0}^{\infty} k^p \mu_p, \quad (267)$$

que aplicado na (266) fornece:

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \sum_{p=0}^{\infty} k^p \mu_p \left[H(\psi) + \frac{2R}{\ell_0} \sum_{r=1}^{\infty} a_r k^{2r} \eta^{2r} \right] d\sigma. \quad (268)$$

Fazendo uso da teoria da multiplicação para séries de potência, cf. Boyce e Di-

prima (2006), é conhecido que para uma série de potencia para uma variável z :

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p \sum_{q=0}^{\infty} b_q z^q = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (269)$$

em que

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \cdots + a_0 b_n = \sum_{s=0}^n a_{n-s} b_s \quad (270)$$

empregando (270) na (269) tem-se:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_p b_q z^{p+q} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} a_{n-s} b_s z^n. \quad (271)$$

Que no contexto aqui trabalhado tem-se $q = 2r$, $s = 2r$ e $z = k$. É possível então escrever a (268) como:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_n H(\psi) + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} k^{p+2r} a_r \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \mu_p \frac{(h - h_P)^{2r}}{\ell_0^{2r+1}} d\sigma. \quad (272)$$

O resultado pode ser escrito em termos de série para T como:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} k^n T_n, \quad (273)$$

onde, para $n = 0$ tem-se:

$$T_0 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_0 H(\psi) d\sigma, \quad (274)$$

e $n > 0$

$$T_n = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_n H(\psi) d\sigma + \sum_{r=1}^M a_r \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{(h - h_P)^{2r}}{\ell_0^{2r+1}} \mu_{n-2r} d\sigma. \quad (275)$$

E para a (267) pode-se escrever:

$$\mu_0 = \delta g, \quad (276)$$

para $n = 0$; e, para $n > 0$:

$$\mu_n = \sum_{r=0}^N b_r \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{(h - h_P)^{2r+1}}{\ell_0^{2r+3}} \mu_{n-2r-1} d\sigma - \sum_{r=1}^M (-1)^r \mu_{n-2r} \tan^{2r} \beta. \quad (277)$$

Os inteiros M e N são definidos por:

$$M = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}, \quad (278)$$

e

$$N = \begin{cases} \frac{n-2}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}. \quad (279)$$

Os coeficientes a_r em (275) e b_r em (277) são dados por;

$$a_r = (-1)^r \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2}, \quad (280)$$

e

$$b_r = (-1)^r \frac{(2r+1)!}{2^{2r}(r!)^2}. \quad (281)$$

Por último escrevem-se as fórmulas para os primeiros termos das Séries de Brovar (273) e (271):

$$\mu_0 = \delta g, \quad (282)$$

$$\mu_1 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h - h_P}{\ell_0^3} \mu_0 d\sigma, \quad (283)$$

$$\mu_2 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h - h_P}{\ell_0^3} \mu_1 d\sigma + \mu_0 \tan^2 \beta, \quad (284)$$

$$\mu_3 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h - h_P}{\ell_0^3} \mu_2 d\sigma - \frac{3R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{(h - h_P)^3}{\ell_0^5} \mu_0 d\sigma + \mu_1 \tan^2 \beta, \quad (285)$$

e

$$T_0 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_0 H(\psi) d\sigma, \quad (286)$$

$$T_1 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_1 H(\psi) d\sigma, \quad (287)$$

$$T_2 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_2 H(\psi) d\sigma - \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{(h - h_P)^2}{\ell_0^3} \mu_0 d\sigma, \quad (288)$$

$$T_3 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_3 H(\psi) d\sigma - \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{(h - h_P)^2}{\ell_0^3} \mu_1 d\sigma. \quad (289)$$

Estes resultados são idênticos com a solução de Brovar, porém, para o problema fixado, lembrando que a solução de Brovar foi para o problema livre. A diferença entre a solução de Molodenskii e a de Brovar ocorre somente por termos negligenciáveis como por aproximação planar quando da solução para o distúrbio do potencial. Porém esta solução é um tanto quanto afanosa. Fórmulas de recorrência para a solução destas equações podem ser desenvolvidas do ponto de vista da continuação analítica. Uma solução completa para as séries de Molodenskii é dada utilizando, ao invés de uma equação integral, a continuação analítica por meio de séries de potência. Esta solução é apresentada como

equivalente, termo a termo, com as séries de Molodenskii-Brovar, no entanto mais simples e praticamente mais conveniente (MORITZ, 1970).

4.4 MODIFICAÇÃO PARA O NÚCLEO DA INTEGRAL DE HOTINE

O núcleo da integral de Hotine atua como uma função de ponderação para os distúrbios de gravidade. Ela depende da distância esférica entre o ponto de integração e o ponto de cálculo (*cf.* FIGURA 33). $S(\psi)$ decresce com o aumento de ψ até cruzar o eixo em zero próximo a 39° , e oscila com valores pequenos até 180° (FIGURA 33). Na região em torno do ponto de cálculo é necessária uma atenção particular, porque $S(\psi)$ tende para o infinito para $\psi = 0$. Esta função é considerada parte essencial do núcleo (ou *Kernel*) da (104) e das (286), (287), (288), (289) e os demais termos da série (271).

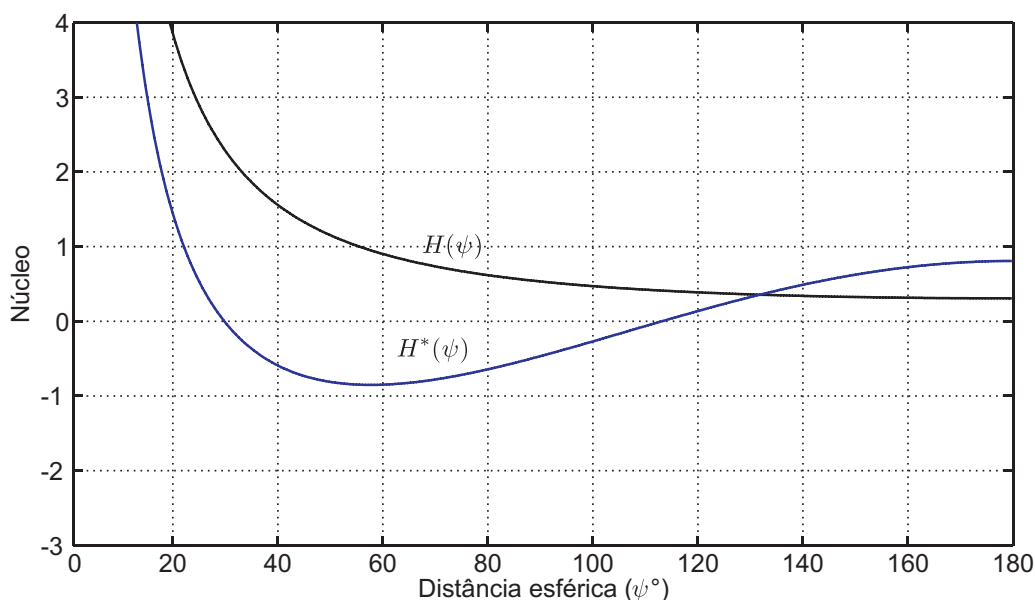


Figura 33 - Comportamento dos núcleos das integrais de Hotine $H(\psi)$ e $H^*(\psi)$

Fonte: O autor

A função de Hotine $H(\psi)$ decresce lentamente quando ψ aumenta. Assim, os pontos de integração distantes exercem considerável influência sobre o ponto de cálculo. Isto significa que se precisa de informações gravimétricas sobre toda a Terra para calcular os funcionais, por exemplo, altura geoidal, para um único ponto como discutido na seção 2.4 ou anomalia de altitude como visto na seção 4.3, após aplicação da fórmula de Bruns¹⁸, *cf.*

¹⁸ $\zeta = \frac{T}{\gamma_Q} + \mathcal{O}(T^2)$. Como a magnitude dos termos de ordem superior diminui rapidamente, o erro na fórmula de Bruns pode ser calculado a partir do segundo termo, o que significa que o erro máximo na anomalia de altitude ζ , devido ao efeito de linearização da fórmula Bruns é de aproximadamente 1,5 mm. Pormenores são apresentados em Ardalan e Grafarend (2001).

(HEISKANEN; MORITZ, 1967, p. 85). Ao invés, muitas modificações são empregadas na prática, quando somente dados em uma área em torno do ponto de cálculo são empregados. A função $H^*(\psi)$ é o núcleo de Hotine removido os harmônicos de grau zero e um.

Para o núcleo da integral de Hotine (105) a ideia é similar às modificações de Stokes. Pode-se escrever então:

$$H(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos \psi). \quad (290)$$

Note que a soma em (290) inclui os harmônicos de ordem zero e um; no entanto, eles são ausentes no núcleo da integral de Stokes. Pode-se escrever então o núcleo da integral de Hotine como:

$$H^*(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos \psi), \quad (291)$$

neste caso, os dois primeiros termos foram omitidos. A (291) e a (290) relacionam-se da seguinte forma:

$$H^*(\psi) = H(\psi) - 1 - \frac{3}{2} \cos \psi. \quad (292)$$

Aplicando a modificação de Wong e Gore para o núcleo da integral de Hotine, tem-se a seguinte modificação para a (291):

$$H^{WG}(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos \psi) - \sum_{n=2}^L \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos \psi). \quad (293)$$

Na Figura 34 é possível visualizar o comportamento de duas modificações, (c) para $L = 360$, (d) para $L = 30$ e (b) e (a) sendo, respectivamente, a função núcleo original de Hotine e Stokes. Sjöberg e Nord (1992) compararam a modificação de Wong e Gore para os núcleos de Stokes e Hotine. A análise numérica mostrou que existem casos em que o núcleo de Hotine é superior ao núcleo de Stokes.

Os coeficientes de truncamento de Molodenskii são os mesmo para as modificações de Stokes. Segundo Jekeli (1979):

$$\bar{Q}_n = \int_{\psi_0}^{\pi} H(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi. \quad (294)$$

Empregando a (291) na (294)

$$\bar{Q}_n^* = \int_{\psi_0}^{\pi} H^*(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi, \quad (295)$$

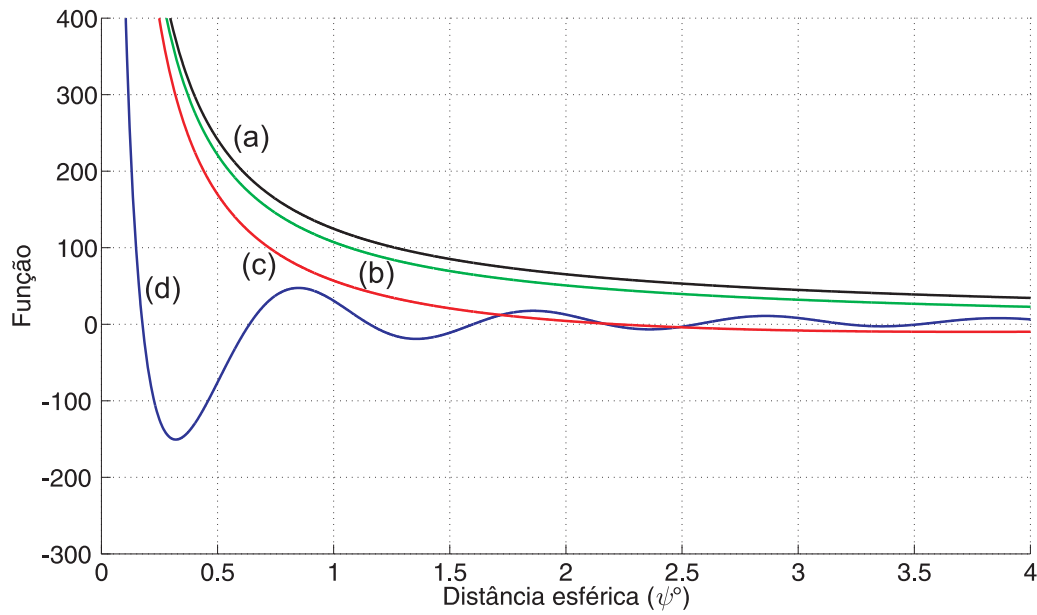


Figura 34 - Modificação de Wong e Gore aplicada à função núcleo de Hotine
Fonte: O autor

que é equivalente a:

$$\bar{Q}_n^* = \bar{Q}_n - \int_{\psi_0}^{\pi} \left(1 + \frac{3}{2} \cos \psi\right) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi. \quad (296)$$

Na Figura 35 pode-se analisar o comportamento do coeficiente \bar{Q}_n^* para diversos graus de truncamento bem como diferentes raios de integração. Todos os cálculos foram efetuados de acordo com o artigo de Hagiwara (1976) e Jekeli (1979). Na Figura 35 a curva (a) representa o comportamento do coeficiente de truncamento para uma distância esférica de 0.5° , a curva (b) representa o comportamento do coeficiente de truncamento para uma distância esférica de 1° , a curva (c) representa o comportamento do coeficiente de truncamento para uma distância esférica de 3° e a curva (d) representa o comportamento do coeficiente de truncamento para uma distância esférica de 6° .

4.5 EFEITO ELIPSOIDAL PARA O PVCG FIXADO

A fórmula de Hotine e Stokes (bem como as suas respectivas inversas) são fórmulas dadas em aproximação esférica. Na aplicação destas fórmulas para grandezas geodésicas, correções elipsoidais são necessárias para obter resultados com precisão compatível com as modernas técnicas de posicionamento. Muitos autores têm investigado a correção elipsoidal para a fórmula original de Stokes, tais como: Molodenskii, Eremeev

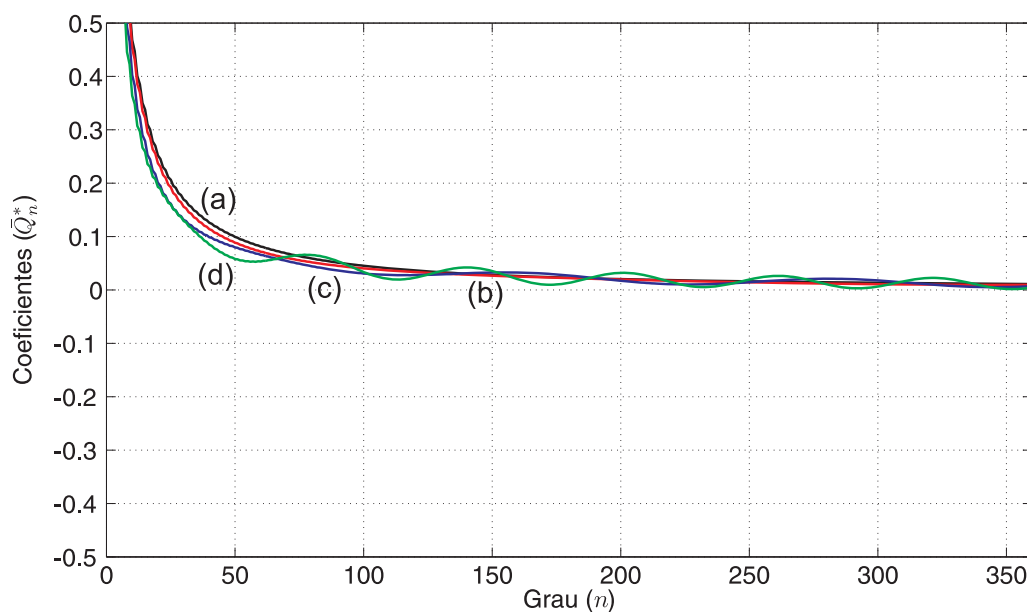


Figura 35 - Comportamento do coeficiente de integração de acordo com a integral (296)

Fonte: O autor

e Yurkina (1962); Moritz (1980); Heck (1991); Martinec e Grafarend (1997); Fei e Sideris (2000); Heck e Seitz (2003).

Em Huang, Véronneau e Pagiatakis (2003), uma comparação numérica entre quatro abordagens foi conduzida, a saber: Molodenskii, Ereemeev e Yurkina (1962); Moritz (1980); Martinec e Grafarend (1997); e Fei e Sideris (2000). As comparações realizadas por estes autores indicam que as diferenças são para os termos harmônicos de primeira ordem e que os primeiros 20 graus dos harmônicos do geopotencial contribuem com 90% da correção elipsoidal. Em Ellmann (2005b) é apresentada a comparação entre o método desenvolvido por Sjöberg (2003b) e os métodos de Martinec e Grafarend (1997) e Fei e Sideris (2000) que segundo o autor os resultados entre os métodos de Sjöberg (2003b) e Fei e Sideris (2000) curiosamente, embora as expressões são muito diferentes, os desvios numéricos são pequenos (presumivelmente, ruído de cálculo). Os métodos de Moritz (1980), Sjöberg (2003b) e Heck e Seitz (2003) são baseados em expansão em séries harmônicas, o método de Molodenskii, Ereemeev e Yurkina (1962) na terceira identidade de Green e Fei e Sideris (2000) na segunda identidade. Do ponto de vista prático, soluções baseadas em harmônicos esférico são mais simples de se empregarem, e são diretamente compatíveis com a técnica da decomposição espectral.

Todos os autores citados no parágrafo anterior determinaram a correção elipsoidal no contexto do núcleo de Stokes, *i.e.*, terceiro PVCG, em Fei (2000) é apresentada a solução no contexto do núcleo de Hotine empregando-se a segunda identidade de Green,

porém, a solução integral é afanosa. Nesta tese aplica-se o método de Moritz (1980) no contexto do segundo PVCG e sendo a solução da ordem $\mathcal{O}(e^4)$. Esta solução é aplicada diretamente nos valores de contorno, ou seja, distúrbios de gravidade e a condição de contorno é:

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial h}\bigg|_S. \quad (297)$$

Na determinação dos termos de correção elipsoidal, o distúrbio do potencial (ou anomalia de altitude) é matematicamente expresso como uma expansão em séries em relação a um pequeno parâmetro ε como:

$$T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (298)$$

Este pequeno parâmetro ε pode ser tanto o quadrado da primeira excentricidade, e^2 , quanto o quadrado da segunda excentricidade, e'^2 . O primeiro termo, $T^{(0)}$, representa a aproximação esférica do distúrbio do potencial e o segundo termo, $T^{(1)}$, a correção elipsoidal para T da ordem de $\mathcal{O}(e^4)$.

Moritz (1980) define uma transformação:

$$T^{(0)}(\varphi, \lambda) = T(r_e, \varphi, \lambda), \quad (299)$$

sendo $T^{(0)}(\varphi, \lambda)$ a representação de $T(r_e, \varphi, \lambda)$ em harmônicos esférico de superfície. $T^{(0)}(\varphi, \lambda)$ pode ser determinado através da modelagem de $\delta g(r_e, \varphi, \lambda)$ em $\delta g^{(0)}(\varphi, \lambda)$ que fornece $T^{(0)}(\varphi, \lambda)$ sobre uma esfera de raio R empregando-se a integral de Hotine para $\delta g^{(0)}(\varphi, \lambda)$ em que:

$$\delta g^{(0)}(\varphi, \lambda) = \delta g(r_e, \varphi, \lambda) - e^2 \delta g^{(1)}(\varphi, \lambda). \quad (300)$$

Os detalhes seguem nas próximas duas subseções.

4.5.1 Distúrbio de gravidade

Aplicando-se uma abordagem simples, proposta por Moritz (1980, capítulo 39) delineada por Hotine (1969, pp. 320-322), inicialmente desenvolvida para o terceiro PVCG, desenvolve-se as correções elipsoidais para o distúrbio de gravidade para o segundo PVCG. Em coordenadas geográficas denotadas por φ e λ , o potencial T para a superfície do elipsoide pode se expresso pela expansão em harmônicos esférico como:

$$T(\varphi, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (301)$$

em que P_{nm} é a função associada de Legendre. A partir da geodésia geométrica sabe-se que a latitude geográfica φ é relacionada com a latitude reduzida β por:

$$\tan \beta = \frac{b}{a} \tan \varphi, \quad (302)$$

a partir da qual se obtém em expansão em séries com respeito a e^2 , retendo os termos lineares:

$$\beta = \varphi - \frac{1}{2}e^2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad (303)$$

$$\varphi = \beta + \frac{1}{2}e^2 \sin \beta \cos \beta, \quad (304)$$

e com a mesma aproximação:

$$P_{nm}(\sin \varphi) = P_{nm}(\sin \beta) + \frac{1}{2}e^2 \frac{dP_{nm}(\sin \beta)}{d\beta} \sin \beta \cos \beta. \quad (305)$$

As fórmulas seguintes são ferramentas básicas para os harmônicos esférico, *cf.* Gradshteyn e Ryzhik (1980, p. 1005):

$$\sin \beta \cos \beta \frac{dP_{nm}(\sin \beta)}{d\beta} = a_{nm}P_{n+2,m}(\sin \beta) + b_{nm}P_{nm}(\sin \beta) + c_{nm}P_{n-2,m}(\sin \beta), \quad (306)$$

com

$$\begin{aligned} a_{nm} &= -\frac{n(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)} \\ b_{nm} &= \frac{n^2 - 3m^2 + n}{(2n+3)(2n-1)} \\ c_{nm} &= \frac{(n+1)(n+m)(n+m-1)}{(2n+1)(2n-1)} \end{aligned} \quad (307)$$

Substituindo (304) na (301) e levando em conta a (305) pode-se transformar a (301) em função de coordenadas elipsoidais β e λ como:

$$T(\beta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + D_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \beta), \quad (308)$$

em que

$$\begin{aligned} C_{nm} &= A_{nm} + \frac{1}{2}e^2 K_{nm} \\ D_{nm} &= B_{nm} + \frac{1}{2}e^2 L_{nm} \\ K_{nm} &= a_{n-2,m}A_{n-2,m} + b_{nm}A_{nm} + c_{n+2,m}A_{n+2,m} \\ L_{nm} &= a_{n-2,m}B_{n-2,m} + b_{nm}B_{nm} + c_{n+2,m}B_{n+2,m} \end{aligned} \quad (309)$$

Em que a (308) fornece o potencial sobre o elipsoide. Para o espaço exterior ao elipsoide,

T pode ser expresso como:

$$T(\beta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n S_{nm}(u) (C_{nm} \cos m\lambda + D_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \beta), \quad (310)$$

em que

$$S_{nm}(u) = \frac{Q_{nm}(i \frac{u}{E})}{Q_{nm}(i \frac{b}{E})}. \quad (311)$$

Sendo Q_{nm} as funções de Legendre do segundo tipo e u denota o semieixo menor de coordenadas elipsoidais passando através do ponto no espaço em consideração, u , β , λ são coordenadas elipsoidais espaciais, Figura 36, cf. Heiskanen e Moritz (1967, seções 1-19 e 1-20).

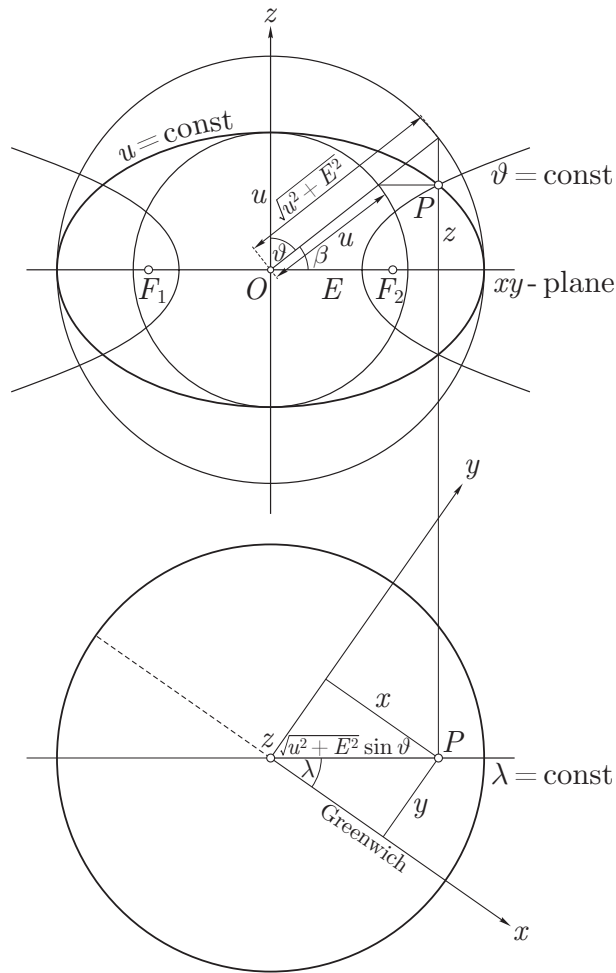


Figura 36 - Coordenadas harmônicas elipsoidais
Fonte: Heiskanen e Moritz (1967)

Empregando a condição de contorno (88), considerando sobre o elipsoide:

$$\delta g = - \left. \frac{\partial T}{\partial h} \right|_E. \quad (312)$$

Esta relação expressa δg em termos da derivada de T na direção normal ao elipsoide. Substituindo a (310) dentro da (312) obtém-se:

$$\delta g = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(-\frac{\partial S_{nm}(u)}{\partial h} \right)_0 (C_{nm} \cos m\lambda + D_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \beta), \quad (313)$$

a partir da (311) chega-se:

$$\frac{dS_{nm}}{du} = \frac{i}{E} \frac{Q'_{nm}(z)}{Q(z_0)}, \quad (314)$$

onde

$$z = i \frac{u}{E}, \quad (315)$$

$$z_0 = i \frac{b}{E} \quad (316)$$

e

$$Q'_{nm} = \frac{dQ_{nm}}{dz}. \quad (317)$$

Em expansão em séries segundo Hobson (1965, p. 195):

$$Q_{nm} = C(1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \left[\frac{1}{z^{n+m+1}} + \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{2(2n+3)z^{n+m+1}} + \dots \right], \quad (318)$$

em que C é uma constante em que o valor não é necessário para o contexto aqui trabalhado. Diferenciando a (318) com respeito a z , substituindo em (314) e fazendo $z = z_0$ (isto é, $u = b$, cf. Figura 36), obtém-se:

$$\left(\frac{dS_{nm}}{du} \right)_0 = \frac{i}{E} \frac{z_0}{1 - z_0^2} (n+1) \left[1 - \frac{(n+m+1)(n-m+1)}{(n+1)(2n+3)} z_0^{-2} + \dots \right], \quad (319)$$

usando a segunda equação em (316), conclui-se diretamente que:

$$\frac{i}{E} \frac{z_0}{1 - z_0^2} = -\frac{b}{a^2}. \quad (320)$$

Dentre as varias possibilidades, a segunda excentricidade pode ser dada como:

$$e' = \frac{E}{b}, \quad (321)$$

tendo então

$$-z_0^{-2} = e'^2 = e^2 + e^4 + e^6 + \dots \quad (322)$$

que difere de e^2 somente pelos termos de alta ordem que podem ser desprezados. Assim, a (319) fornece:

$$\left(\frac{dS_{nm}}{du} \right)_0 = -\frac{b}{a^2} \left[n+1 + \frac{(n+m+1)(n-m+1)}{2n+3} e^2 \right]. \quad (323)$$

Pode-se ainda escrever:

$$\frac{b}{a^2} = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{2}{3}e^2 \right). \quad (324)$$

Em vista da (323) e (324) a (313) toma a forma:

$$\delta g = \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[n+1 + e^2 \left(\frac{(n+m+1)(n-m+1)}{2n+3} - \frac{2n+2}{3} \right) \right] T_{nm}(\beta, \lambda). \quad (325)$$

No entanto, resta ainda expressar $T_{nm}(\beta, \lambda)$ em termos de (φ, λ) , lembrando que pela (308) pode-se:

$$T_{nm}(\beta, \lambda) = (C_{nm} \cos m\lambda + D_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \beta). \quad (326)$$

Na (305) pode-se substituir β por φ no termo multiplicado por e^2 sem prejudicar a precisão, donde:

$$P_{nm}(\sin \beta) = P_{nm}(\sin \varphi) - \frac{1}{2}e^2 \frac{dP_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi} \sin \varphi \cos \varphi. \quad (327)$$

Na (326) pode-se substituir $P_{nm}(\sin \beta)$ pela (327) e os coeficientes C_{nm} e D_{nm} pelas duas primeiras linhas de (309). A expressão para $T_{nm}(\beta, \lambda)$ obtida é inserida em (325) que, depois de simples álgebra e negligenciando termos multiplicados por e^4 , fornece:

$$\begin{aligned} \delta g = & \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{n+1}{R} (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm} + \\ & + \frac{e^2}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ \left[\left(\frac{(n+m+1)(n-m+1)}{2n+3} - \frac{2n+2}{3} \right) P_{nm} - \frac{n+1}{2} \frac{dP_{nm}}{d\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \right] \times \right. \\ & \times (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) + \left. \frac{n+1}{2} P_{nm} (K_{nm} \cos m\lambda + L_{nm} \sin m\lambda) \right\} \end{aligned} \quad (328)$$

Pode-se promover a expressão $\sin \varphi \cos \varphi \frac{dP_{nm}}{d\varphi}$ pela (306), com φ ao invés de β , e $\sin^2 \varphi P_{nm}$ por

$$\sin^2 \varphi P_{nm}(\sin \varphi) = \alpha_{nm} P_{n+2,m} + \beta_{nm} P_{nm} + \gamma_{nm} P_{n-2,m}, \quad (329)$$

em que

$$\begin{aligned} \alpha_{nm} &= \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)} \\ \beta_{nm} &= \frac{2n^2 - 2m^2 + 2n - 1}{(2n+3)(2n-1)} \\ \gamma_{nm} &= \frac{(n+m)(n+m-1)}{(2n+1)(2n-1)} \end{aligned} \quad (330)$$

Estas relações são obtidas aplicando-se a relação (GRADSHTEYN; RYZHIK, 1980, p. 1005):

$$\sin \beta P_{nm}(\sin \beta) = \frac{n-m+1}{2n+1} P_{n+1,m}(\sin \beta) + \frac{n+m}{2n+1} P_{n-1,m}(\sin \beta), \quad (331)$$

duas vezes. Por último, troca-se a variável somatória em termos de $P_{n+2,m}$ por $P_{n-2,m}$ obtendo-se:

$$\delta g = \delta g^0 + e^2 \delta g^1. \quad (332)$$

em que

$$\delta g^0 = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{n+1}{R} (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (333)$$

e

$$\delta g^1 = \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (G_{nm} \cos m\lambda + H_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (334)$$

com

$$\begin{aligned} G_{nm} &= \kappa_{nm} A_{n-2,m} + \lambda_{nm} A_{nm} + \mu_{nm} A_{n+2,m}, \\ H_{nm} &= \kappa_{nm} B_{n-2,m} + \lambda_{nm} B_{nm} + \mu_{nm} B_{n+2,m}, \end{aligned} \quad (335)$$

e

$$\begin{aligned} \kappa_{nm} &= -\frac{3(n-3)(n-m-1)(n-m)}{2(2n-3)(2n-1)} \\ \lambda_{nm} &= \frac{n^3 - 3m^2n - 9n^2 - 6m^2 - 10n + 9}{3(2n+3)(2n-1)}. \\ \mu_{nm} &= \frac{(3n+5)(n+m+2)(n+m+1)}{2(2n+5)(2n+3)} \end{aligned} \quad (336)$$

4.5.2 Anomalia de altitude

A solução de para o distúrbio do potencial é expresso como:

$$T_i^{(0)}(\varphi, \lambda) = \frac{r_P}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_i^{(0)}(\varphi, \lambda) H(r_P, \psi) d\sigma. \quad (337)$$

Em que os termos $\mu_i^{(0)}$ são dados pela (273), com $\mu_0^{(0)} = \delta g^{(0)}$ e os demais calculados de forma recursiva e $\delta g^{(0)}$ é dado pela (332) como:

$$\delta g^{(0)} = \delta g - e^2 \delta g^{(1)}, \quad (338)$$

em que $\delta g^{(1)}$ é dado pela (334). O raio r_P é dado por:

$$r_P = R + h_P, \quad (339)$$

h_P é a altitude do ponto de cálculo P conforme a Figura 13. A solução para $T(r_e, \varphi, \lambda)$ é dada da seguinte forma:

$$T(r_e, \varphi, \lambda) = \frac{r_P}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_i^{(0)}(\varphi, \lambda) H(r_P, \psi) d\sigma + e^2 T^{(1)}(\varphi, \lambda). \quad (340)$$

É conveniente avaliar a integral para $T^{(1)}(\varphi, \lambda)$ empregando-se $\delta g^{(1)}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T^{(1)}(\varphi, \lambda) &= \frac{r_P}{4\pi} \iint_{\sigma} \delta g^{(1)}(\varphi, \lambda) H(R_P, \psi) d\sigma \\ &= R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n [G_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + H_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)] \end{aligned} \quad (341)$$

Esta é uma consequência direta de:

$$T_n = \frac{R}{n+1} \delta g_n. \quad (342)$$

Em muitas situações práticas é suficiente:

$$\zeta^{(1)} = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi \right) \zeta^{(0)}. \quad (343)$$

4.6 DE ANOMALIAS DE GRAVIDADE PARA DISTÚRBIOS DE GRAVIDADE

Na falta de posicionamento GPS associada à gravimetria, como é, por exemplo, o caso da maioria das observações no Brasil e na América do Sul, pode-se converter as anomalias de gravidade em distúrbios de gravidade. No entanto, estas observações de gravidade são associadas, quando muito, a nivelamentos vinculados à rede altimétrica local relativa a um zero determinado com base no nível médio dos mares para uma dada época. Para tornar a solução do PVCG fixado realizável, é necessário medir as posições dos pontos cujos valores de gravidade são observados via GPS. Fei (2000) em sua tese de doutorado recomenda produzir um instrumento que integra o gravímetro e o receptor GPS de forma que a posição e o valor de gravidade do ponto de observação possam ser medidos simultaneamente.

No sentido de tentar contornar este problema, propõem-se uma alternativa para o uso de anomalias de gravidade no contexto do PVCG fixado. Considere as duas condições de contorno em aproximação esférica:

$$\delta g = - \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_S, \quad (344)$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T, \quad (345)$$

e

$$\zeta = \frac{T}{\gamma_Q}. \quad (346)$$

Dependendo da qualidade dos dados, as quantidades do lado esquerdo das equações (344), (345) e (346) podem ser corrigidas de erros de linearização e aproximação esférica. A correção esférica para estas grandezas pode ser derivada da seção anterior, por exemplo.

Se considerada uma aproximação planar para a condição de contorno (345), mas antes pode-se escrevê-la como:

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R}T, \quad (347)$$

em aproximação planar tem-se que $R \rightarrow \infty$ e o segundo termo da (347) resulta em $-\frac{2}{R}T = 0$. Neste caso tem-se que:

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} = \delta g, \quad (348)$$

a anomalia de gravidade é igual ao distúrbio de gravidade. Para aplicações locais, é suficiente empregar esta consideração.

A anomalia de gravidade na relação (345) é definida para a superfície terrestre segundo a definição de Molodenskii. Neste caso, pode-se escrever para a mesma:

$$\Delta g_P = g_P - \gamma_Q, \quad (349)$$

e para o distúrbio de gravidade, tem-se

$$\delta g_P = g_P - \gamma_P. \quad (350)$$

Pode-se ainda realizar a diferença entre a (349) e a (350) como:

$$(\dot{g}_P - \gamma_Q) - (\dot{g}_P - \gamma_P) = \gamma_P - \gamma_Q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\partial^n \gamma}{\partial h^n} \Big|_Q \zeta^n, \quad (351)$$

em que de forma simples, converte-se anomalia de gravidade em distúrbio de gravidade sem sofrer influências dos erros de aproximações cometidos nas expressões anteriores. Sendo assim tem-se:

$$\delta g_P = \Delta g_P - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\partial^n \gamma}{\partial h^n} \Big|_Q \zeta_P^n. \quad (352)$$

Observação 1 O método não é ideal porque requer um conhecimento a priori da anomalia de altitude ζ_P , o que levanta a seguinte reflexão: Por que não empregar diretamente

a anomalia de altitude nas altitudes associadas à anomalia de gravidade e convertê-las em altitudes elipsoidais e por último calcular os distúrbios de gravidade? No entanto, os resultados devem indicar a validade dessa abordagem.

Caso haja um modelo geoidal (ou quase geoidal) de alta precisão, como é o caso do Estado de Bade-Vurtemberg na Alemanha, com precisão ao nível de 1 cm, pode-se converter as altitude normais associadas à gravimetria em altitudes elipsoidais e calcular o distúrbio de gravidade de forma direta. Na ausência deste modelo de alta precisão, resta um processo iterativo empregando-se a anomalia de altitude aproximada para a (352). Tenta-se, assim, refinar este valor após cada iteração. Como desvantagem tem-se o fato de que em cada iteração ter que resolver um número grande de integrais.

Dando um tratamento local às observações, anomalia de gravidade, Δg^j relativa a uma particular referência local j , pode-se escrever de acordo com Rummel e Teunissen (1988):

$$\Delta g = \Delta g^j + \frac{2}{R} \delta W_{Q_j 0}. \quad (353)$$

Em que o termo $\delta W_{Q_j 0}$ é a diferença de potencial entre o *datum* local j e o *datum* global.

5 O PVCG FIXO - ESTUDOS DE CASOS

Frequentemente tem-se um cenário, em que há disponíveis mais observações do que realmente o necessário para uma região, mas muito poucas para outra. Para a falta de dados não há método que possa remediar. (TSCHERNING, 1984, p. 329).

No capítulo anterior, a fundamentação teórica de uma metodologia com base na determinação do problema de valor de contorno da geodésia em sua versão fixada foi estabelecida. Neste capítulo pretende-se testar a metodologia através do cálculo de um quase geoide local de alta resolução para o Estado de Bade-Vurtemberg, Alemanha. Este experimento comporá a seção 5.1. Resumidamente calculou-se um quase geoide de alta resolução, a saber, 30 arco-segundos e o mesmo foi considerado como parâmetro para o estudo de mascaramento (*aliasing*) quando da amostragem do sinal gravimétrico. Para tanto, calculou-se modelos do quase geoide com as resoluções de: 1'x1'; 2,5'x2,5'; 5'x5'; 7,5'x7,5' e 10'x10'. Este estudo serve de base para fornecer uma cobertura adequada de dados gravimétricos em função de uma precisão almejada para o quase geoide.

Ainda no contexto da metodologia do capítulo anterior, e com vistas aos problemas do Capítulo 3, procedeu-se um experimento no contexto brasileiro, para tanto, calculou-se um quase geoide para o Estado do Paraná e o mesmo foi comparado com informações GPS sobre as RNs do SGB. Problemas inerentes às componentes espectrais das anomalias de gravidade locais são discutidos com base nos resultados obtidos na seção 5.1. Este experimento compõe a seção 5.2.

5.1 QUASE GEOIDE DE ALTA RESOLUÇÃO PARA BADE-VURTEMBERGA

Na Figura 37 nota-se a área compreendida entre as latitudes 46°N e 51°N e longitudes 6°E e 12°E em que os dados estão disponibilizados. O quase geoide final está compreendido entre as latitudes 47°N e 50°N e longitudes 7°E e 11°E como mostra o retângulo envolvendo o estado de Bade-Vurtemberg na Figura 27. Neste caso, margens de 1° em ambos os lados foram deixadas para evitar efeitos de borda quando da solução das integrais. Neste sentido o raio de integração é limitado conforme a regra de Rapp (RAPP, 1977) a partir do ponto de cálculo P .

5.1.1 Dados de entrada

5.1.1.1 Modelo digital de elevação

Segundo Heiskanen e Moritz (1967), um MDT é necessário na determinação do geoide porque efeitos gravitacionais para as massas topográficas externas ao geoide têm



Figura 37 - Localização da área de estudos na Alemanha, estado federal de Bade-Vurtemberg

Fonte: O autor

de ser matematicamente condensados no geóide, ou abaixo dele, na condição de satisfazer o PVCG. Em adição a esta demanda do ponto de vista teórico, um modelo de alta resolução da topografia pode prover informações adicionais relativas aos curtos comprimentos de onda do quase geóide. Estes dados ainda auxiliam no processo de suavização dos valores do campo de gravidade antes do processo de interpolação destes valores. O objetivo da interpolação destes valores é construir uma malha que neste caso, se removido, a alta frequência do sinal, faz com que o processo de construção da grade seja menos sensível ao mascaramento, onde altas frequências da subamostra são indevidamente propagadas dentro das baixas frequências.

Os limites geográficos adotados (latitudes 44°N e 53°N e longitudes 4°E e 14°E) para o MDT são maiores, em 2° , ao limite geográfico das observações gravimétricas cumprindo assim as exigências dos cálculos dos efeitos gravimétricos residuais da topografia (RTM). Para o cálculo deste efeito sobre as anomalias de gravidade (ou distúrbios de gra-

vidade), para o qual é necessário dispor de um MDT num raio de aproximadamente 220 km em torno de cada estação gravimétrica conforme visto na subseção 2.4.1.

Na Figura 38 pode-se observar a topografia para a região de estudos. A mesma advém do modelo SRTM (RODRIGUEZ et al., 2005) com resolução espacial de 3 arco-segundos (90 metros). É importante mencionar que este modelo é referido ao MGG EGM96 e referenciado ao elipsoide de referência WGS84. No entanto, para fins de aplicações deste trabalho, o SRTM foi adaptado ao geoide do EGM2008 (grau 2.190 e ordem 2.159) associado ao WGS84. Em Denker (2005) uma validação do SRTM foi conduzida na Alemanha através de comparações com um MDT nacional com resolução de 100 metros. A partir desta análise encontrou-se que o desvio padrão varia de 6,0 m e 12,3 m para regiões relativamente planas e para a região dos Alpes, respectivamente. Destas comparações conclui-se que na falta de um MDT em escala nacional, pode-se empregar o SRTM para determinar as componentes de alta frequência do campo de gravidade.

Tziavos, Vergos e Grigoriadis (2010) estudaram o efeito de mascaramento causado pela resolução do modelo de elevação e sua contribuição no cálculo da altura quase geoidal RTM, bem como o efeito gravimétrico RTM. Para tanto, estes autores empregaram o SRTM com reamostragem das resoluções de 15", 30", 1', 2' e 5'. A principal conclusão do trabalho destes autores é que o estudo dos efeitos de mascaramento sobre o MDT mostrou que, quando modelos de alta resolução e exatidão da gravidade e altura geoidais são desejados, então deve-se empregar o MDT com a mais alta resolução disponível para o cálculo dos respectivos efeitos gravitacionais da topografia. Em qualquer caso, pode-se concluir sem qualquer dúvida de que os MDTs da geração SRTM possuem grande melhoria em comparação com os demais MDTs globais. Durante os últimos anos, vários estudos foram realizados a fim de reduzir o efeito de mascaramento na gravidade e alturas geoidais, utilizando dados digitais do terreno (SIDERIS; FORSBERG, 1991); (FEATHERSTONE; KIRBY, 2000); (LI; SIDERIS; SCHWARZ, 1995); (BAJRACHARYA, 2003).

O modelo de referência empregado para a topografia residual foi o DTM2006.0 (PAVLIS; FACTOR; HOLMES, 2007) que baseia-se em um conjunto de coeficientes de harmônicos esférico até o grau e ordem 2.160. Desenvolvendo este modelo até o grau e ordem 360 o mesmo atua como um filtro passa baixo. Um filtro passa baixo, tal como o próprio nome evidencia, filtra as variações bruscas de altitude do MDT, ou seja, as altas frequências. Este filtro atua removendo as altas frequências da topografia deixando passar somente as baixas frequências.

Para este tipo de filtro, pode-se concluir que no MDT filtrado se verifica uma suavização relativamente ao MDT original, que é tanto mais visível e mais acentuada quanto

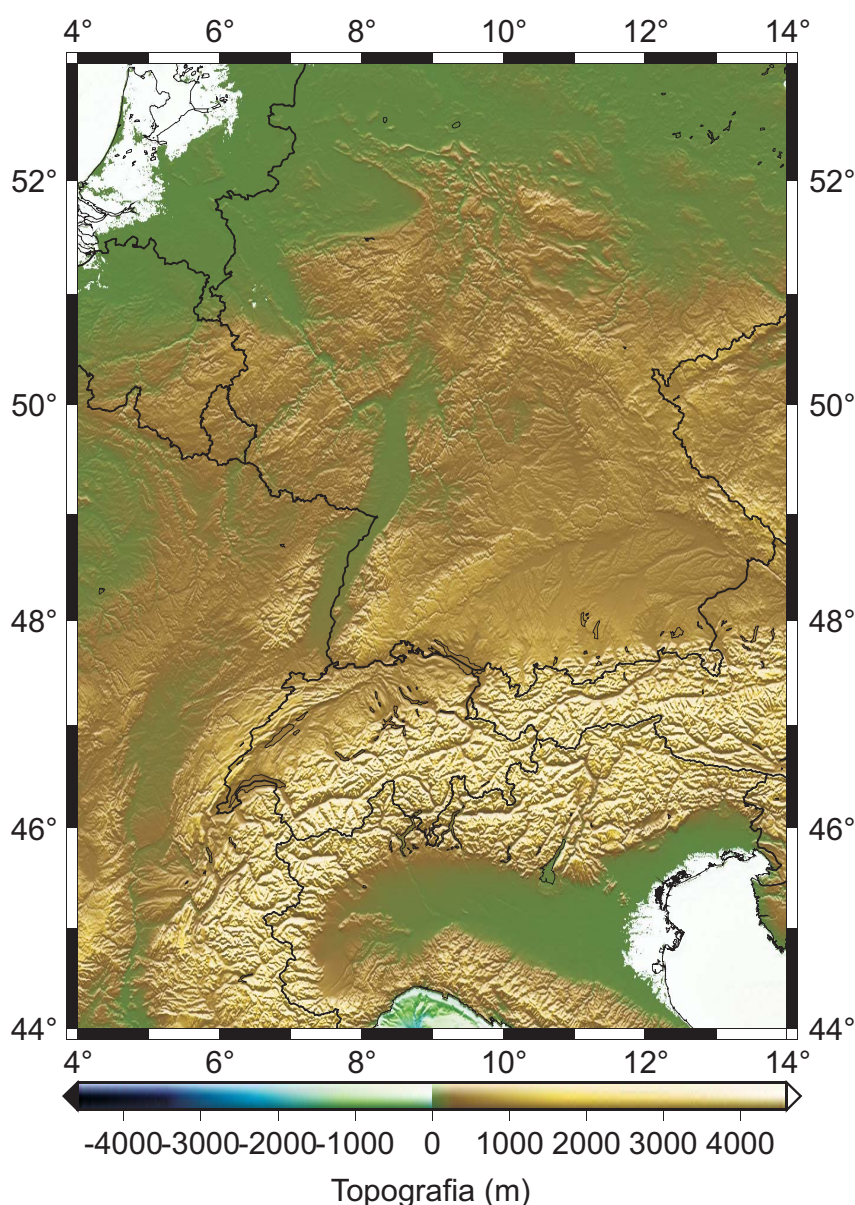


Figura 38 - Topografia para a região de estudos (SRTM)

Fonte: O autor

menor for a frequência aplicada, ou quanto maior for o tamanho da janela utilizada. Esta suavização do MDT acontece, uma vez que as variações mais bruscas de altitudes são filtradas, sendo que quanto menor for a frequência de corte, maior é o número de variações filtradas. Por outro lado, quanto maior for o tamanho da janela, maior vai ser a contribuição dos píxeis vizinhos para o ponto que deseja-se determinar, logo o MDT sofrerá um maior “esbatimento”.

O DTM2006.0 desenvolvido até o grau e ordem, segundo a série (160), fornece a topografia de referência para o cálculo dos devidos efeitos topográficos pelo método RTM. Definidas a topografia original (MDT) e a de referência, procedeu-se o cálculo da anomalia

de altitude RTM, ζ_{RTM} . Estes valores podem ser visualizados na Figura 39 em que os mesmos foram calculados dentro das condições já mencionadas (subseção 2.4.1).

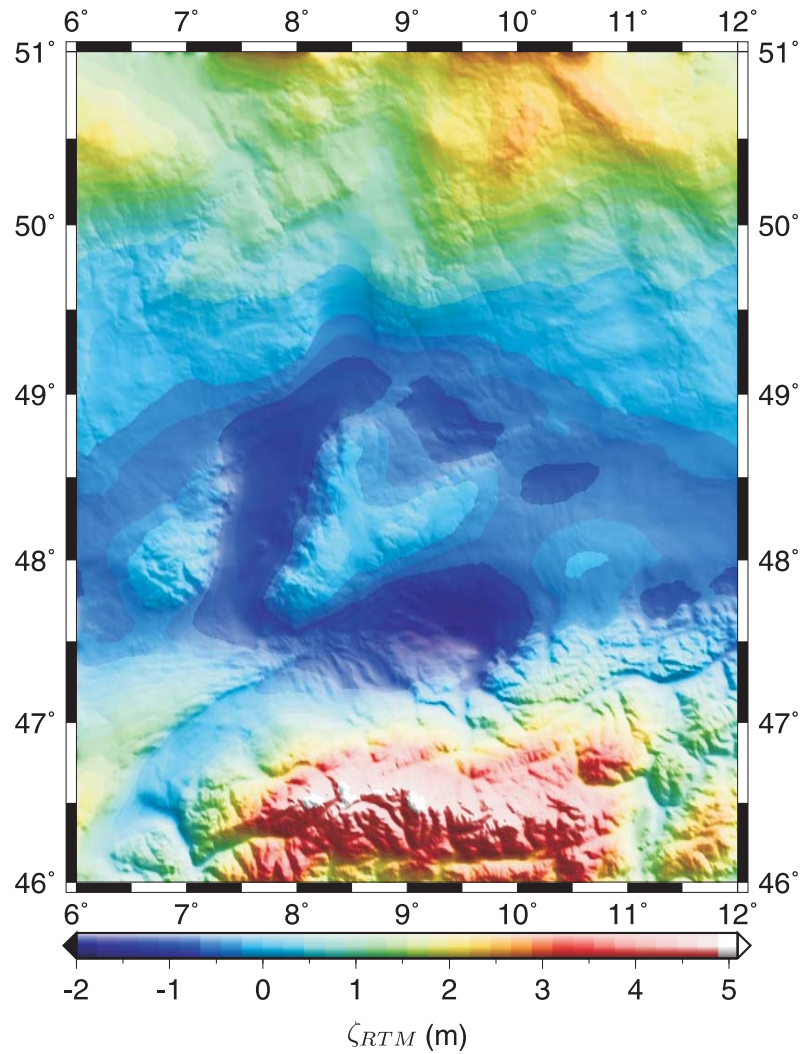


Figura 39 - Efeito indireto sobre o quase geoide ζ_{RTM}

Fonte: O autor

Finalmente, e para acrescentar, este efeito sobre a restauração do quase geoide é calculado sobre os pontos da malha final do modelo do quase geoide. Isso significa que nenhum erro será causado por uma interpolação adicional de grade dos efeitos sobre a anomalia de altitude do quase geoide. Esta componente é importante na etapa de restauração no contexto da técnica da decomposição espectral conforme já mencionado, neste caso:

$$\zeta = \zeta_{EGM2008}^{360} + \zeta_{res} + \zeta_{RTM}. \quad (354)$$

O efeito gravimétrico RTM, δg_{RTM} , é apresentado na Figura 40 apenas para ilustração. Note que, ao contrário do efeito de cálculo RTM sobre o quase geoide, o efeito

gravimétrico δg_{RTM} é calculado diretamente sobre as estações gravimétricas distribuídas de forma irregular (item 5.1.1.3), pois este efeito visa somente à redução das anomalias de gravidade para posterior interpolação.

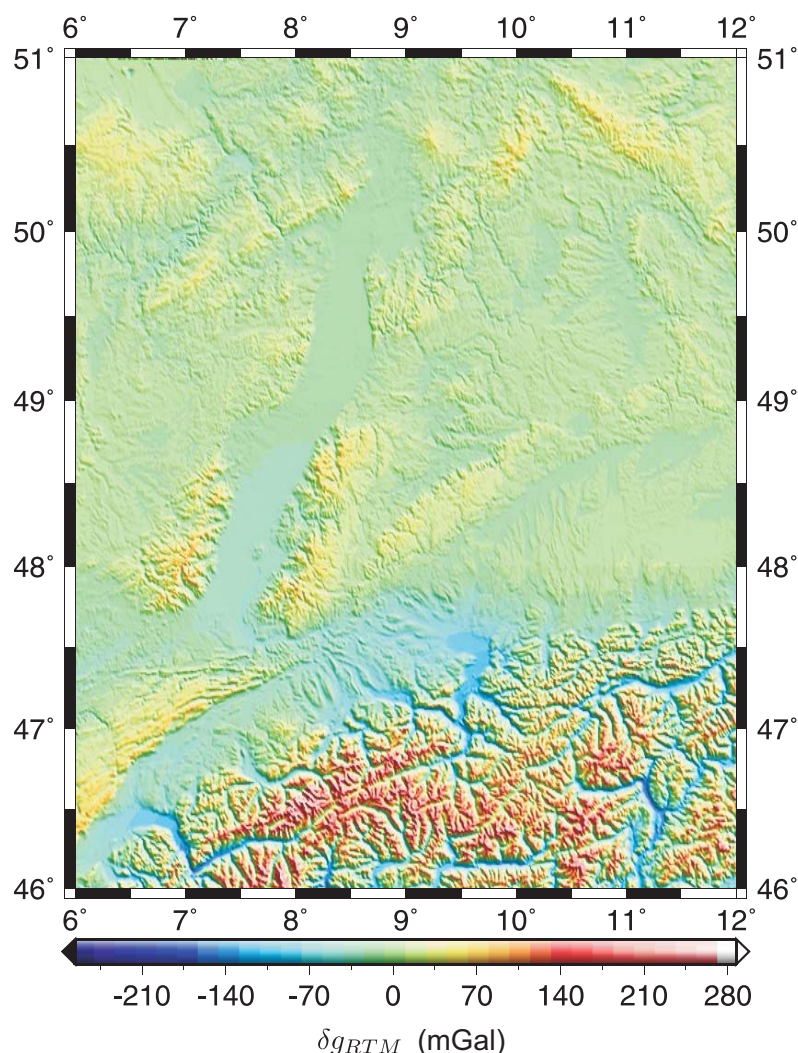


Figura 40 - Efeito gravimétrico para a redução RTM

Fonte: O autor

5.1.1.2 Longos comprimentos de onda: Earth Gravity Model 2008

Como foi visto em seções precedentes, o campo de gravidade é dividido, no domínio da onda, em longos, médios e curtos comprimentos. Os longos comprimentos de onda advêm de modelos globais de gravidade. Nesta análise é empregado o EGM2008 em grau e ordem 360. Os distúrbios de gravidade advindos deste modelo global são calculados,

dentre as várias possibilidades, como segue (BARTHELMES, 2009):

$$\delta g_{MGG}(h, \lambda, \varphi) = \sqrt{[W_u(h, \lambda, \varphi)]^2 + [W_v(h, \lambda, \varphi)]^2 + [W_w(h, \lambda, \varphi)]^2} - \sqrt{[U_u(h, \lambda, \varphi)]^2 + [U_v(h, \lambda, \varphi)]^2 + [U_w(h, \lambda, \varphi)]^2}, \quad (355)$$

em que

$$\nabla W(h, \lambda, \varphi) = W_u(h, \lambda, \varphi)\vec{e}_u + W_v(h, \lambda, \varphi)\vec{e}_v + W_w(h, \lambda, \varphi)\vec{e}_w \quad (356)$$

e

$$\nabla U(h, \lambda, \varphi) = U_u(h, \lambda, \varphi)\vec{e}_u + U_v(h, \lambda, \varphi)\vec{e}_v + U_w(h, \lambda, \varphi)\vec{e}_w, \quad (357)$$

onde $W_u, W_v, W_w, U_u, U_v, U_w$ são as derivadas parciais e $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$ são vetores unitários nas direções de u, v, w . Para calcular o distúrbio de gravidade (355) os gradientes (356) e (357) são calculados a partir de harmônicos esférico.

Desde já, o potencial W associado com a rotação da Terra é a soma do potencial de atração V e o potencial centrífugo Φ , Heiskanen e Moritz (1967):

$$W = V + \Phi \quad (358)$$

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{2}\omega^2 d_z^2, \quad (359)$$

em que ω é a velocidade angular da Terra e $d_z = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a distância para o eixo de rotação (z).

A parte estacionária do potencial gravitacional da Terra V para qualquer ponto (r, λ, φ) sobre a superfície terrestre é expressa em uma escala global convenientemente pela soma até o grau e ordem para uma expansão em harmônicos esférico. A equação relatando os domínios do espaço e espectral do geopotencial é dado como segue, Torge (2001, p. 70):

$$V(r, \lambda, \varphi) = \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{l_{\text{máx}}} \sum_{m=0}^l P_{lm}(\sin \varphi) (C_{lm}^W \cos m\lambda + S_{lm}^W \sin m\lambda). \quad (360)$$

Obviamente, de forma análoga à Terra real, a parte relativa à Terra normal, U_a para o potencial normal U , e assim o distúrbio do potencial T pode ser expandido em harmônicos esféricos também. Denominando os coeficientes que representam U_a por C_{lm}^U e S_{lm}^U e coeficientes C_{lm}^T e S_{lm}^T para o distúrbio do potencial como as simples diferenças:

$$C_{lm}^T = C_{lm}^W - C_{lm}^U \text{ e } S_{lm}^T = S_{lm}^W - S_{lm}^U. \quad (361)$$

A expansão do potencial normal elipsoidal contém somente termos de ordem $m = 0$ e grau par. Para o cálculo do potencial normal na prática, na maioria dos casos, é

suficiente considerar somente os coeficientes zonais C_{00}^U , C_{20}^U , C_{40}^U , C_{60}^U e alguns casos C_{80}^U . Consequentemente para $|\nabla W|$ tem-se:

$$|\nabla W| = \sqrt{[V_r + \Phi_r]^2 + \left[\frac{1}{r \cos \varphi} (V_\lambda + \Phi_\lambda) \right]^2 + \left[\frac{1}{r} (V_\varphi + \Phi_\varphi) \right]^2}, \quad (362)$$

e as derivadas de (360) em harmônicos esférico são:

$$V_r = -\frac{GM}{r^2} \sum_{l=0}^{l_{\max}} \left(\frac{R}{r} \right)^l (l+1) \sum_{m=0}^l P_{lm}(\sin \varphi) (C_{lm}^W \cos m\lambda + S_{lm}^W \sin m\lambda), \quad (363)$$

$$V_\lambda = \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{l_{\max}} \left(\frac{R}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l m P_{lm}(\sin \varphi) (S_{lm}^W \cos m\lambda - C_{lm}^W \sin m\lambda), \quad (364)$$

$$V_\varphi = \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{l_{\max}} \left(\frac{R}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l \frac{\partial P_{lm}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} (C_{lm}^W \cos m\lambda - S_{lm}^W \sin m\lambda). \quad (365)$$

O potencial centrífugo em coordenadas esféricas é, Torge (2001, p. 72):

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi, \quad (366)$$

e suas derivadas são:

$$\Phi_r = \omega^2 r \cos^2 \varphi, \quad \Phi_\lambda = 0, \quad \Phi_\varphi = -\omega^2 r^2 \cos \varphi \sin \varphi. \quad (367)$$

O mesmo é válido para $|\nabla U|$, basta substituir W por U e C_{lm}^W , S_{lm}^W por C_{lm}^U e S_{lm}^U .

O cálculo da anomalia de altitude $\zeta(\varphi, \lambda)$ a partir dos modelos do potencial em harmônicos esférico de acordo com a iteração (BARTHELMES, 2009):

$$\zeta_{i+1} = \zeta_i(\lambda, \varphi) + \frac{1}{(0)} [W(h_t, \lambda, \varphi) - U(h_t - \zeta_i, \lambda, \varphi)], \quad (368)$$

é possível usando as equações (358), (359) e (360). O distúrbio do potencial em harmônicos esférico é, Torge (2001, p. 215):

$$T(r, \lambda, \varphi) = \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{l_{\max}} \left(\frac{R}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l P_{lm}(\sin \varphi) (C_{lm}^T \cos m\lambda + S_{lm}^T \sin m\lambda) \quad (369)$$

para $r \geq r_P$.

Usando os coeficientes para o distúrbio do potencial (equações 357, 365 e 356) o cálculo de acordo com a equação:

$$\zeta_{e1}(\lambda, \varphi) = \frac{T^c(0, \lambda, \varphi)}{\gamma(0, \varphi)}, \quad (370)$$

é simples. Sem utilizar o modelo de topografia ela pode ser calculada a partir da equação

(370) por:

$$\zeta_{e1}(\lambda, \varphi) = \frac{GM}{r_e \gamma(r_e, \varphi)} \sum_{l=0}^{l_{\max}} \left(\frac{R}{r_e} \right)^l \sum_{m=0}^l P_{lm}(\sin \varphi) (C_{lm}^T \cos m\lambda + S_{lm}^T \sin m\lambda), \quad (371)$$

$$\tilde{\zeta}_1(\lambda, \varphi) \approx \zeta_{e1}(\lambda, \varphi) + \left(\frac{h_t}{\gamma(0)} \frac{\partial T^c}{\partial h} \Big|_{h=0} \right). \quad (372)$$

E o raio $r(\lambda, \varphi)$ para o ponto de cálculo é $r_e = r_e(\varphi)$.

Com a equação (372) eles podem ser calculados de forma mais precisa como:

$$\tilde{\zeta}_1 = \zeta_{e1} + \frac{H(\varphi, \lambda) + N(\varphi, \lambda)}{\gamma(0, \varphi)} \frac{\partial T^c}{\partial r} \Big|_{r=r_e}. \quad (373)$$

A qual pode ser calculada a partir de harmônicos esférico se empregada à equação (160) para H e para N :

$$\begin{aligned} N(\lambda, \varphi) = & \frac{GM}{r_\zeta \gamma(r_e, \varphi)} \sum_{l=0}^{l_{\max}} \left(\frac{R}{r_\zeta} \right)^l \sum_{m=0}^l P_{lm}(\sin \varphi) (C_{lm}^T \cos m\lambda + S_{lm}^T \sin m\lambda) \\ & - 2\pi G\rho \left[\sum_{l=0}^{l_{\max}} \sum_{m=0}^l P_{lm}(\sin \varphi) (C_{lm}^{topo} \cos m\lambda + S_{lm}^{topo} \sin m\lambda) \right]^2 \end{aligned} \quad (374)$$

e a equação:

$$\delta g_{sa}(0, \lambda, \varphi) = - \frac{\partial T^c}{\partial r} \Big|_{h=0}, \quad (375)$$

é dada por:

$$\delta g_{sa}(0, \lambda, \varphi) = - \frac{GM}{r^2} \sum_{l=0}^{l_{\max}} \left(\frac{R}{r} \right)^l (l+1) \sum_{m=0}^l P_{lm}(\sin \varphi) (C_{lm}^T \cos m\lambda + S_{lm}^T \sin m\lambda), \quad (376)$$

para a derivada radial de T^c em aproximação esférica.

5.1.1.3 Observações gravimétricas: módulo da intensidade de gravidade

Na Figura 41 é mostrada a distribuição geográfica dos valores de intensidade de gravidade para a área compreendida entre as latitudes 46°N e 51°N e longitudes 6°E e 12°E. Estes dados são em um número de 119.363 pontos, porém, nota-se que de acordo com a Figura 41 estes dados não são distribuídos de forma regular na maioria dos casos.

O fato de não se ter dados amostrados com espaços regulares é similar ao problema de mascaramento na amostragem de um sinal qualquer. O sinal da gravidade é amostrado tal que as informações de alta frequência são omitidas e pode ser mascarada dentro das baixas frequências. De acordo com o Teorema de Nyquist, a quantidade de

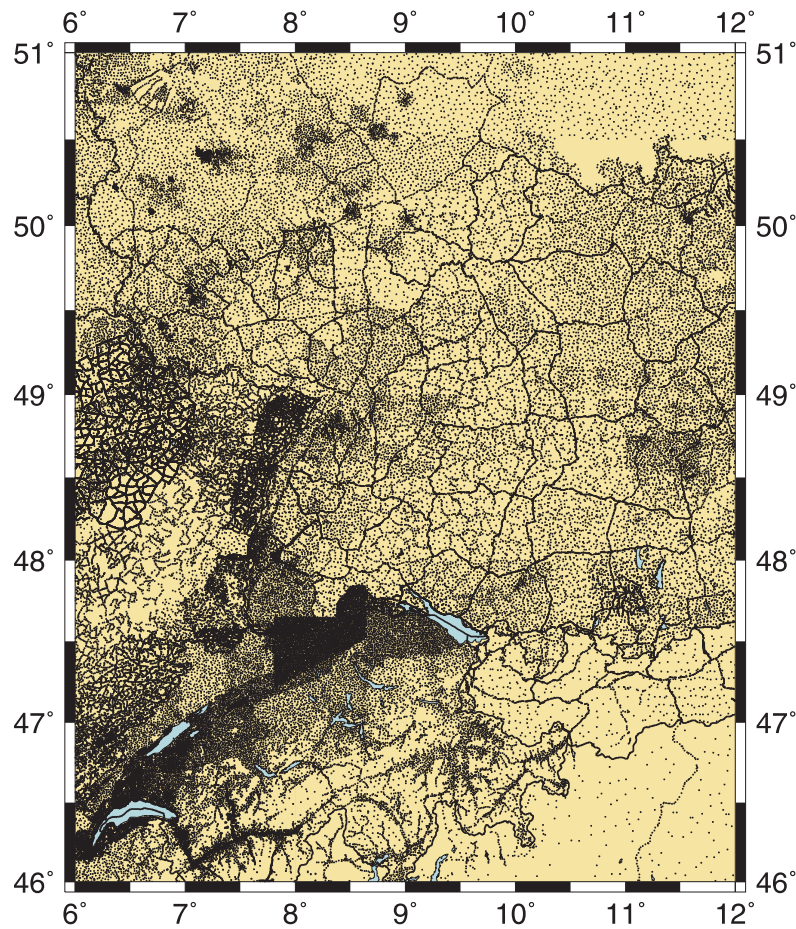


Figura 41 - Distribuição de dados gravimétricos para a região de estudos

Fonte: O autor

amostras por unidade de tempo (ou espaço) de um sinal, chamada taxa ou frequência de amostragem, deve ser maior que o dobro da maior frequência contida no sinal a ser amostrado, para que possa ser reproduzido integralmente sem erro de mascaramento. A metade da frequência de amostragem (f_a) é chamada frequência de Nyquist (f_N) e corresponde ao limite máximo de frequência do sinal que pode ser reproduzido. Matematicamente tem-se:

$$f_a \geq 2f_N. \quad (377)$$

Como um exemplo simples, considere o EGM2008 em seu grau máximo 2.160, a frequência de amostragem deste modelo é $f_a = 5'$ e a frequência de Nyquist é igual a $f_N = 2,5'$. No contexto de uma malha formada por blocos equiângulos, com lados $\theta^\circ \times \theta^\circ$, possui o grau de Nyquist definido como $f_N = 180^\circ/\theta^\circ$.

Como não é possível garantir que o sinal não contenha sinais acima deste limite (distorções, interferências, ruídos etc), é necessário filtrar o sinal com um filtro passa baixo com frequência de corte igual (ou menor) a frequência de Nyquist, ou filtro antisserrilha-

mento. O processo de criação da malha com os valores dos distúrbios de gravidade residuais é mostrado na Figura 42. Qual o espaçamento que a malha final deverá conter para os valores de distúrbios de gravidade residuais? A resposta para a questão remete à regra de Tscherning (1984, p. 329). Este autor sugeriu um método para determinar o espaçamento d da malha a ser interpolada a partir de valores esparsos com uma dada distância de correlação ψ_1 e uma covariância C_0 e um erro (ruído) para os valores preditos de \bar{e}_d .

Para um espaçamento de dados com uma distância média d entre os pontos se encontrará para $d < 2\psi_1$:

$$\bar{e}_d^2 = C_0 \left(d \frac{0,3}{\psi_1} \right)^2, \quad (378)$$

que de forma geral atende aos critérios da frequência de Nyquist. Sendo assim, o espaçamento médio entre os pontos é definido se for determinada a variância dos dados e a distância de correlação da função covariância, e definido o erro que se espera para a estimação.

Tem-se mostrado que a suavização dos dados é extremamente importante para reduzir a perda de informações quando os dados são interpolados em uma malha. Pode ser vantajoso usar espaçamentos de grade menor que a média dos dados esparsos a fim de limitar a perda de informações na grade. Mas, se a malha é muito densa a melhoria na precisão do geoide pode ser marginal. Quando o espaçamento dos pontos nós da malha é menor que a frequência de Nyquist, as discrepâncias são relativamente estáveis e o uso de uma malha densa fornece um resultado melhor. Por outro lado, quando o espaçamento dos pontos nós da malha é maior que a frequência de Nyquist, as discrepâncias tornam-se maiores. Uma possível explicação é o fato de se discretizar o núcleo da integral de Stokes (ou Hotine no caso desta tese).

Na Figura 43 é possível visualizar os respectivos pontos da Figura 41, porém agora apresentando os distúrbios de gravidade residuais na forma:

$$\delta g_{res} = \delta g - \delta g_{EGM2008}^{360} - \delta g_{RTM}. \quad (379)$$

Estes valores foram calculados com base na seção 4.6. Neste caso, converteram-se todas as altitudes relacionadas com os valores de gravidade em altitudes elipsoidais. Em seguida determinaram-se os distúrbios de gravidade sobre a superfície terrestre.

É possível notar na Figura 43 que o comportamento do distúrbio de gravidade residual é suave na maior parte da área de estudos, porém, na parte sul, notam-se irregularidades devido às características da topografia.

No sentido de descobrir qual o melhor espaçamento entre os pontos nós para a malha final com os valores de gravidade, calculou-se a covariância C_0 empírica para os

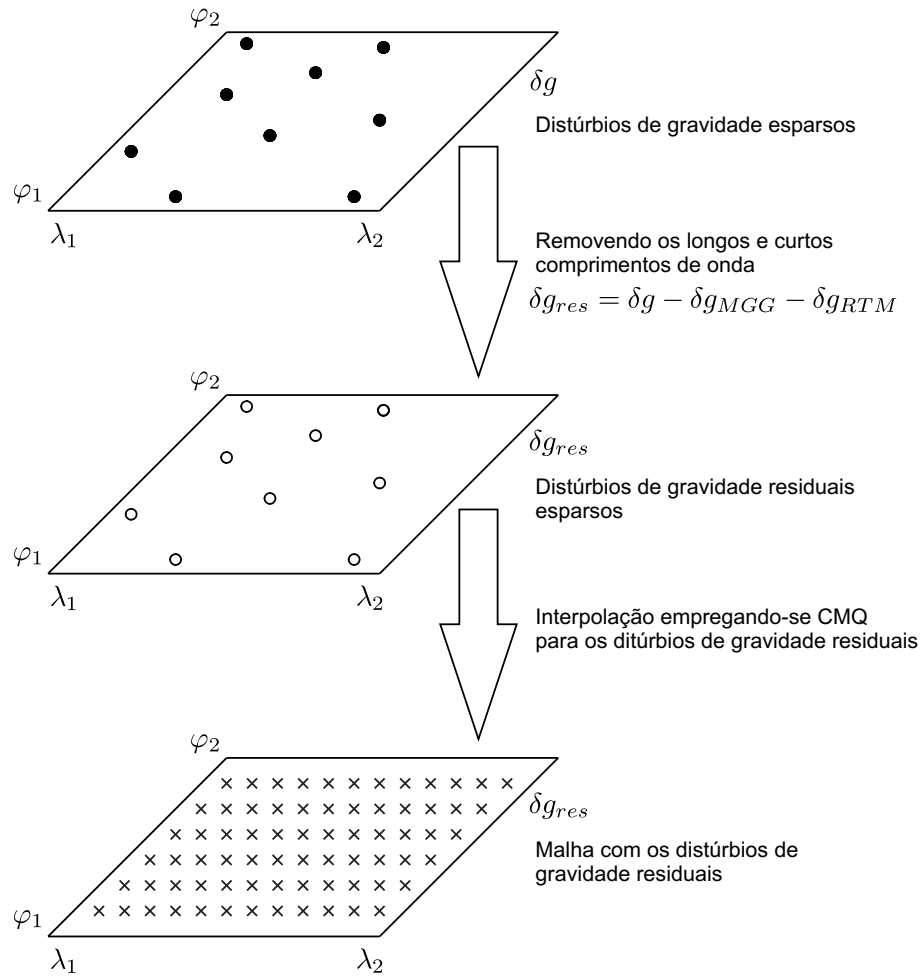


Figura 42 - Processo de interpolação dos distúrbios de gravidade residuais

Fonte: O autor

distúrbios de gravidade residuais. A função covariância amostral pode ser visualizada na Figura 44. Este gráfico fornece a indicação da variabilidade dos distúrbios de gravidade residuais em torno de um ponto genérico qualquer em função das distâncias que os separam.

O valor da covariância para $\psi = 0^\circ$ é $C_0 = 417,627 \text{ mGal}^2$ e uma distância de correlação de aproximadamente $\psi_1 = 21$ arco-minutos. Se considerado que a distância média entre os pontos possa ser dada em função da densidade de pontos por área, neste caso:

$$\bar{d} = \sqrt{\frac{A}{np}}, \quad (380)$$

em que A é a área (km^2) do retângulo envolvendo os dados e np o número de pontos dentro deste retângulo. Para o caso da Figura 41 tem-se para $\bar{d} = 1,43 \text{ km}$ que equivale a aproximadamente 46 arco-segundos de espaçamento médio entre os pontos. Retornando

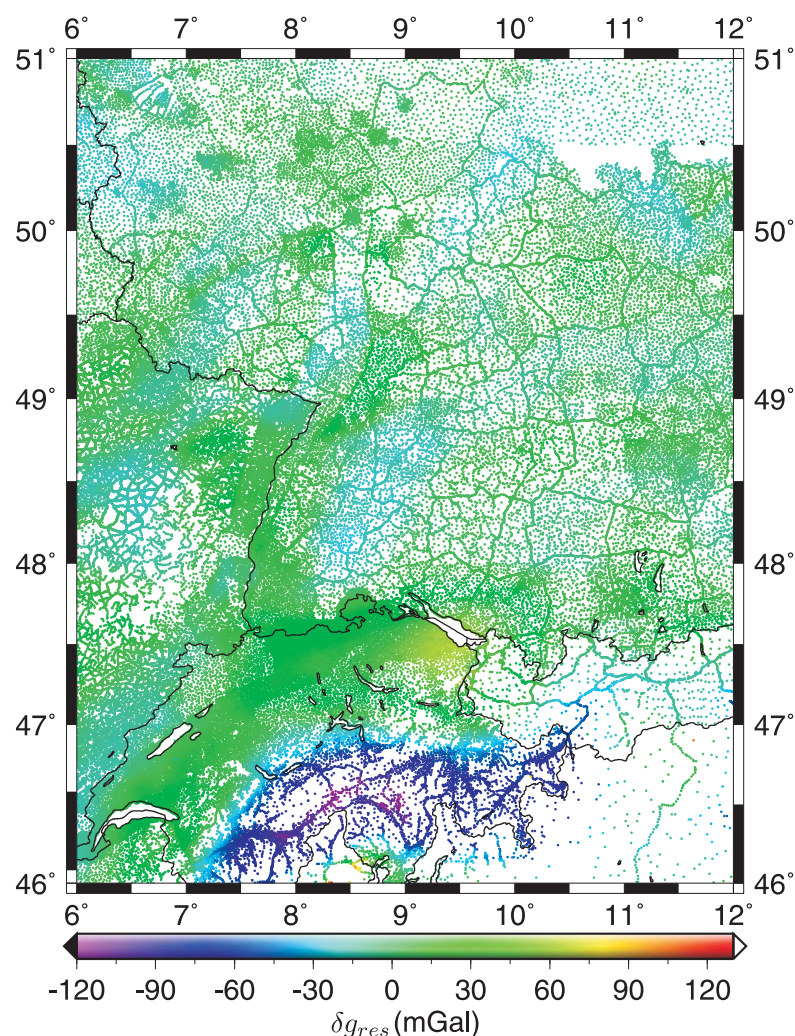


Figura 43 - Distribuição dos distúrbios de gravidade residuais δg_{res}

Fonte: O autor

Nota: Os valores variaram de -119,243 mGal a 123,028 mGal com um desvio padrão de 22,450 mGal e uma média de 1,347 mGal. As cores dos pontos na figura ilustram a intensidade do distúrbio e pode ser analisada a partir da escala de cores.

a regra de Tscherning (1984), equação (378), estes valores fornecem uma estimativa de erro de 0,2 mGal para a construção da malha com 46 arco-segundos de resolução. Se empregado um espaçamento de 30 arco-segundos tem-se um erro de aproximadamente 0,1 mGal. O modelo final do quase geóide foi decidido a ser calculado em uma grade com distância entre nós de 0,5 arco-minuto. Esta resolução atende aos requisitos da regra de Tscherning (1984) bem como o limite mínimo de acordo com a teoria da amostragem.

Do ponto de vista teórico, se um modelo do geopotencial, tal como o EGM96, é usado para fornecer os longos comprimentos de onda do campo de gravidade para a altura geoidal, por exemplo, é suficiente integrar as anomalias de gravidade residuais sobre um

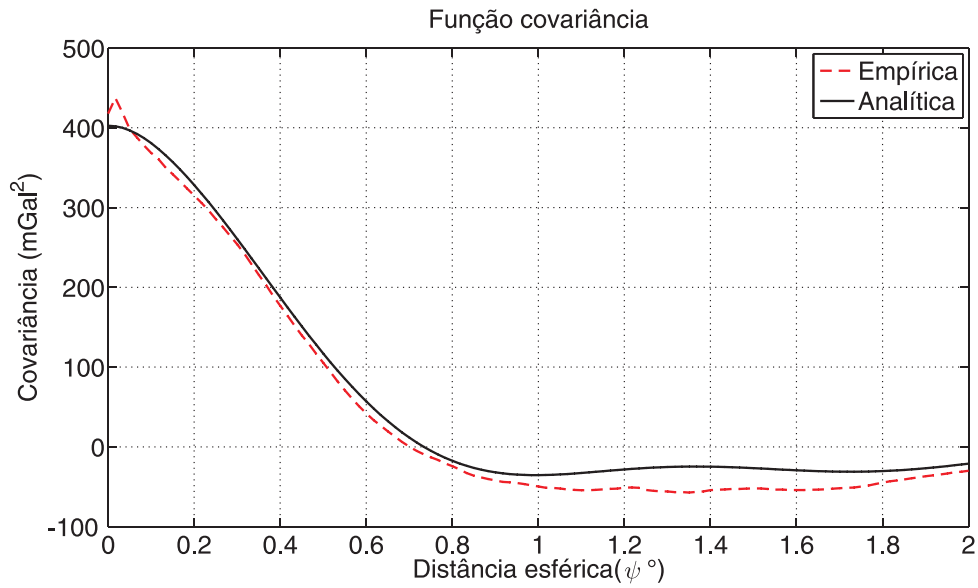


Figura 44 - Função covariância amostral e analítica para os distúrbios de gravidade residuais

Fonte: O autor

bloco equiângulo com dimensões correspondentes à resolução do MGG. De acordo com a regra prática de Rapp (1977), o tamanho do bloco equiângulo para a integral de Stokes, por exemplo, empregando anomalias de gravidade residuais deve ser igual a $0,5^\circ$ se adotado um MGG com o grau e ordem 360, matematicamente:

$$\theta_0^\circ = \frac{180}{n_{máx}}. \quad (381)$$

Observação 2 Note que o raio para a calota esférica é muito menor que o valor $0,5^\circ$, se considerando a diferença entre o raio do círculo ($\approx 0,3^\circ$) e o bloco equiângulo ($0,5^\circ \times 0,5^\circ$), aproximadamente tem-se que $\theta_0^\circ \times \theta_0^\circ = \pi \psi_0^2$.

Entretanto, a restrição para o raio de integração na omissão de dados de gravidade para as zonas distantes (curtos comprimentos de onda) causa erros de truncamento conforme (RUMMEL; RAPP, 1977). Em Sjöberg (2005a) é mostrado que este erro de truncamento pode atingir 3 cm para uma calota esférica de raio igual a 2° (dois graus), o qual de acordo com a regra de Rapp corresponde para $n_{máx} = 50$. Alternativamente, estes erros de truncamento na integração podem ser reduzidos aplicando-se as considerações da seção 4.4.

Para limitar a influência de erros de longo comprimento de onda dos dados de gravidade, a calota não deve ser muito grande, enquanto um raio muito pequeno causa um erro maior de truncamento. O valor escolhido é um compromisso razoável para o responsável pelos cálculos. Na prática, muitos autores têm recorrido ao método heurístico

para descobrir qual a melhor distância esférica de integração, este procedimento baseia-se em comparar os geoides calculados com diferentes distâncias de integração com dados GPS sobre RNs, veja, por exemplo: Kearsley (1988); Zhang (1997); Tocho (2006); Amos (2007); entre outros.

Outra técnica é determinar a potência espectral para o geoide do MGG e a potência para o geoide local, o ponto em que estes gráficos de energia se interceptarem, este ponto fornecerá a melhor combinação com dados globais e locais. Na verdade este ponto de intercessão caracteriza que a partir deste ponto (grau de desenvolvimento em harmônicos esférico) o geoide local contém mais energia para as altas frequências do que o modelo global. Pormenores destes procedimentos são dados por Esan (2000).

5.1.2 O quase geoide para o Estado de Bade-Vurtemberg

Empregando-se os distúrbios de gravidade residuais advindos da seção anterior, após interpolação em uma malha calculou-se as correções para a anomalia de altitude ζ , cita-se a Tabela 1 em que a mesma mostra os termos ζ_1 e ζ_2 , para tanto empregou-se para a região de estudos as seguintes integrais:

$$\zeta_1 = \frac{R}{4\pi\gamma_Q} \iint_{\sigma} \mu_1 H(\psi) d\sigma, \quad (382)$$

$$\zeta_2 = \frac{R}{4\pi\gamma_Q} \iint_{\sigma} \mu_2 H(\psi) d\sigma - \frac{R^2}{4\pi\gamma_Q} \iint_{\sigma} \frac{(h - h_P)^2}{\ell_0^3} \mu_0 d\sigma, \quad (383)$$

com

$$\mu_0 = \delta g_{res}, \quad (384)$$

$$\mu_1 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h - h_P}{\ell_0^3} \mu_0 d\sigma, \quad (385)$$

$$\mu_2 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h - h_P}{\ell_0^3} \mu_1 d\sigma + \mu_0 \tan^2 \beta. \quad (386)$$

Tabela 1 - Comportamento estatístico dos termos corretivos para a anomalia de altitude para $n = 2$

Estatística	ζ_1	ζ_2
mínimo	-0,0168	-0,0635
máximo	0,1568	0,2413
média	0,0328	0,0284
desvio padrão	0,0193	0,0297

Fonte: O autor

Nota: Unidades em metros.

Os resultados resumidos nas estatísticas da Tabela 1 mostram que na média os

valores para o termo de segunda ordem são menores que o de primeira ordem, no entanto, eles são significativos para a região aqui analisada. No domínio do espaço na Figura 45 pode-se notar o comportamento do termo de primeira ordem. Neste caso talvez seja necessário o cálculo de termos de ordem maiores, e talvez o índice de suavização que os distúrbios de gravidade residuais trazem consigo não são suficientes para estas regiões em específico.

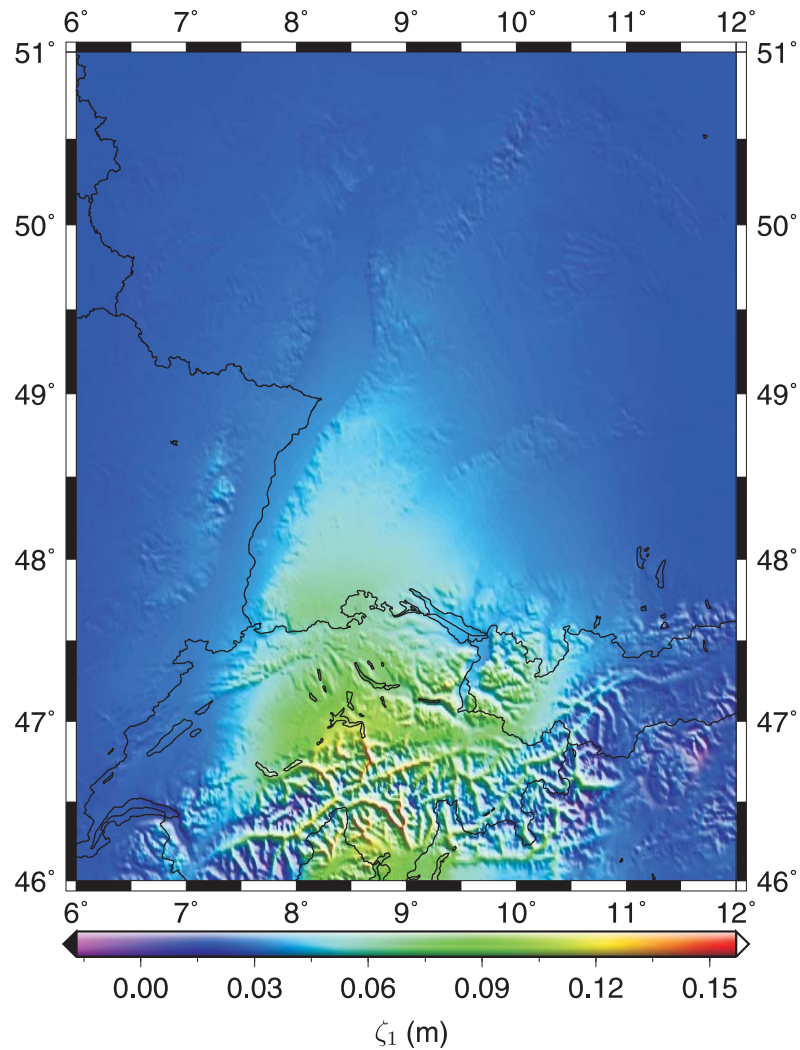


Figura 45 - Comportamento do termo de correção de primeira ordem para as séries de Brovar no contexto do segundo PVCG

Fonte: O autor

As anomalias de altitudes foram calculadas com base nas equações:

$$\zeta_{res} = \frac{R}{4\pi\gamma_Q} \iint_{\sigma} \mu_0 H(\psi) d\sigma \quad (387)$$

e

$$\zeta = \zeta_{MGG} + \zeta_{res} + \zeta_{RTM} + \zeta_1 + \zeta_2, \quad (388)$$

os termos ζ_1 e ζ_2 foram determinados como visto anteriormente, ou seja, empregou-se as (382) e (383). Todas as convoluções, como o caso da equação (387) e as (382) e (383), foram solucionadas no domínio das frequências empregando-se a FFT-1D (*One-Dimensional Fast Fourier Transform*) conforme Schwarz, Sideris e Forsberg (1990) e Haagmans, Min e Gelderen (1993) e empregando-se um raio de integração de $0,3^\circ$ a partir do ponto de cálculo conforme a regra de Rapp (1977).

O EGM2008 até o grau e ordem 360 para os longos comprimentos de onda fornecendo a componente ζ_{MGG} no processo de recomposição, e δg em $30'' \times 30''$, $1' \times 1'$, $2,5' \times 2,5'$, $5' \times 5'$, $7,5' \times 7,5'$ e $10' \times 10'$ de resolução para as malhas. Cada conjunto de baixa resolução de distúrbios de gravidade foi gerado a partir dos dados originais por dizimação. O quase geoide de alta resolução, $30'' \times 30''$, pode ser visto na Figura 46, o mesmo é adotado como parâmetro para a comparação dos demais modelos com dados de gravidade de baixa resolução. Este experimento fornece uma ideia de quanto se perde de precisão devido ao erro de omissão.

Nesta área que envolve o modelo do quase geoide para Bade-Vurtemberg, nota-se duas subáreas (FIGURA 47) representando comparativamente a topografia suave e acidentada e a correspondente comparação para o quase geoide para as mesmas. Esta comparação fornece subsídios necessários sobre a resolução em áreas com a topografia relativamente plana e acidentada para os dados de gravidade quando da amostragem destes valores.

Supondo que existam somente erros aleatórios nas observações de gravidade, a maior fonte de erros na determinação do campo de gravidade são aqueles causados pela amostragem insuficiente do sinal gravimétrico, ou em outras palavras efeitos de mascaramento. Segundo Vassiliou (1988) estes erros aumentam assim como a amostragem do campo de gravidade é mais grosseira, e precisam ser considerados de forma explícita, uma vez que pode se tornar bastante significativo. Este autor ainda conclui que para os erros de mascaramento ficar abaixo de um nível aceitável o espaçamento utilizado deve ser da ordem de 1 km, que pode ser, atualmente, um espaçamento irreal, especialmente para a realidade brasileira.

Nestas áreas, a anomalia de altitude verdadeira, $\zeta_{verdadeira}$, foram comparadas com as anomalias de altitudes estimadas, $\zeta_{estimada}$, correspondentes a cada resolução das malhas, com $\zeta_{verdadeira}$ definida pela malha de alta resolução. A Figura 48 mostra o comportamento do erro médio quadrático (emq) das diferenças $\zeta_{verdadeiro} - \zeta_{estimado}$.

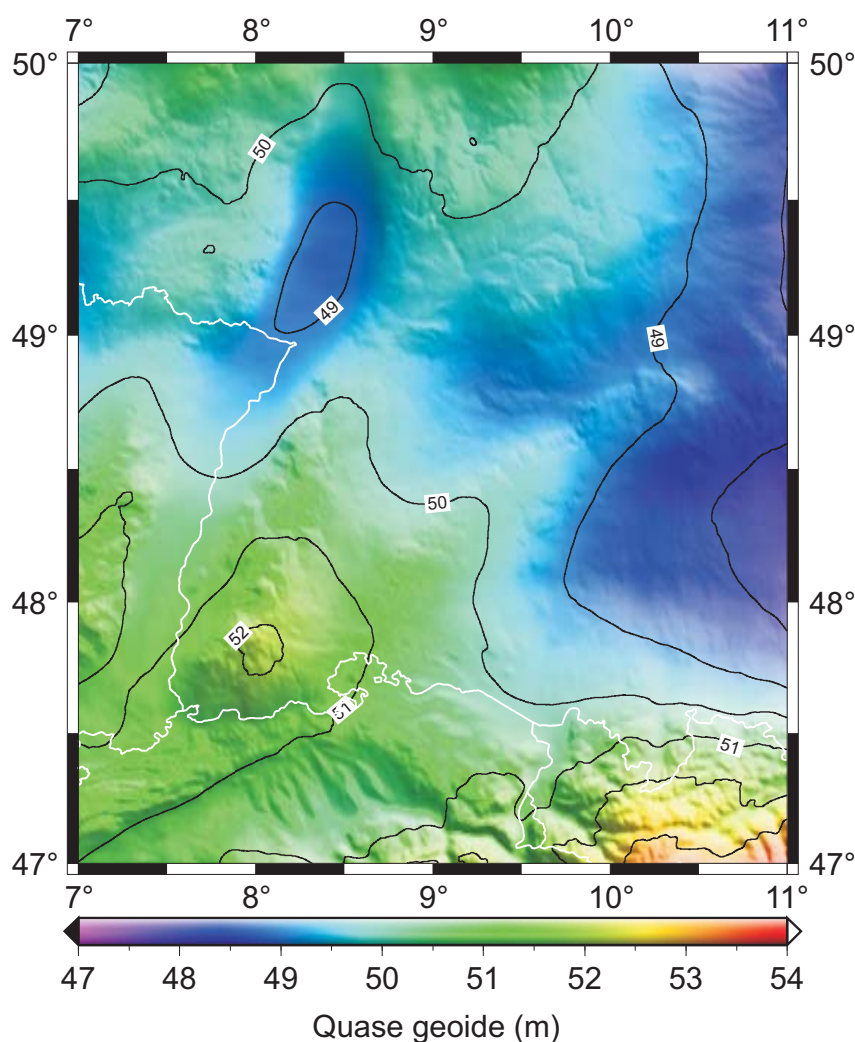


Figura 46 - Quase geoide para o estado federal de Bade-Vurtemberg com 30 segundos de arco de resolução
Fonte: O autor

Tomando-se como parâmetro um modelo de geoide calculado com anomalias de gravidade com uma resolução de 30 arco-segundos tem-se para um geoide calculado com anomalias de gravidade com 5 arco-minutos um erro médio quadrático de 11,5 cm para áreas montanhosas e 11,0 cm para áreas planas e este erro aumenta na medida em que o espaçamento entre as observações de gravidade são maiores. A Tabela 2 mostra as estatísticas adicionais das diferenças de anomalias de altitudes. Estas estatísticas fornecem somente um resumo da avaliação do efeito da resolução dos dados sobre o cálculo do quase geoide. Desta tabela pode-se concluir que se o quase geoide desejado deva possuir uma precisão da ordem de 1 cm (emq), um erro de omissão de 1,3 cm (emq) pode ser alcançado com uma resolução de 1 arco-minuto. Entretanto, esta avaliação pode ser um tanto otimista, pois os dados tidos como parâmetros foram definidos com a metade desta resolução, 30 arco-segundos.

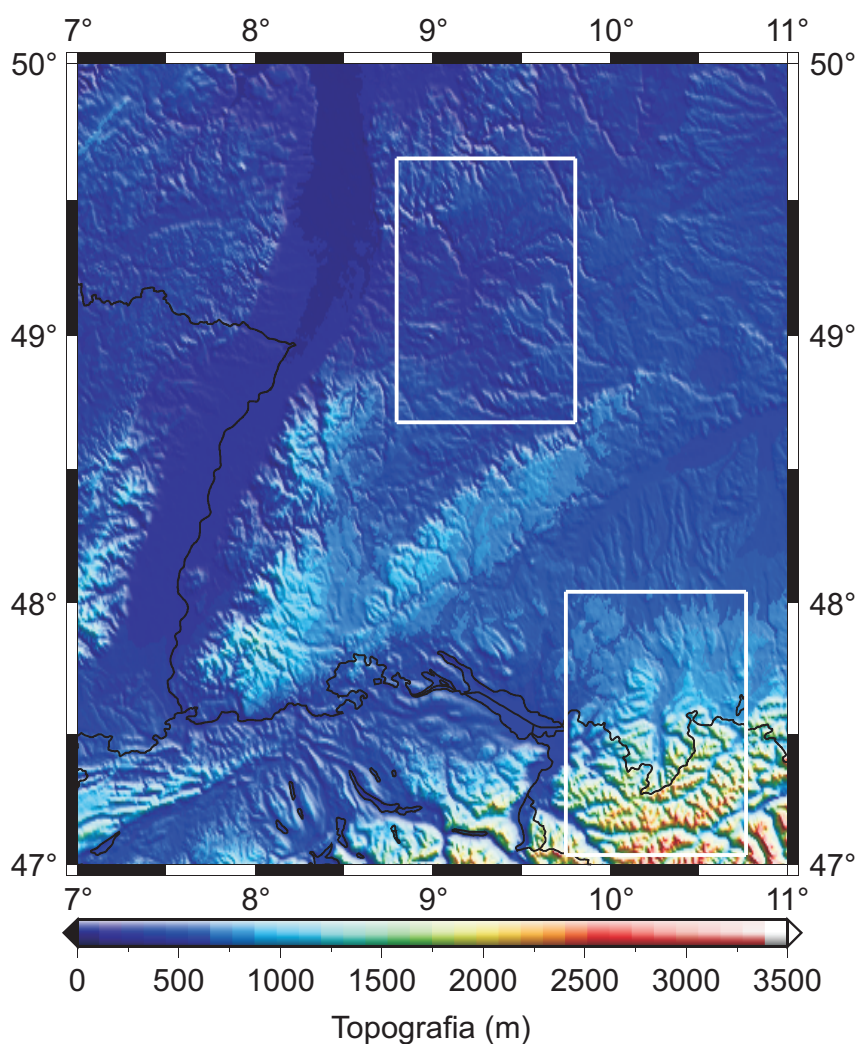


Figura 47 - Topografia para o estado federal de Bade-Vurtemberg indicando duas subáreas com os relevos relativamente suave e acidentado

Fonte: O autor

5.2 O QUASE GEOIDE PARA O ESTADO DO PARANÁ

Na Figura 49 nota-se a área compreendida entre as latitudes 29°S e 20°S e longitudes 57°W e 46°W em que os dados estão disponibilizados. O quase geoide final será compreendido entre as latitudes 27°S e 22°S e longitudes 55°W e 48°W como mostra o retângulo envolvendo o Estado do Paraná na Figura 49. Neste caso, margens de 2° em ambos os lados foram deixadas para evitar-se efeitos de borda quando da solução das integrais relativas aos efeitos topográficos (cerca de 220 km). Neste sentido o raio de integração ψ_0 será limitado ao máximo conforme a regra de Rapp (RAPP, 1977) a partir do ponto de cálculo P .

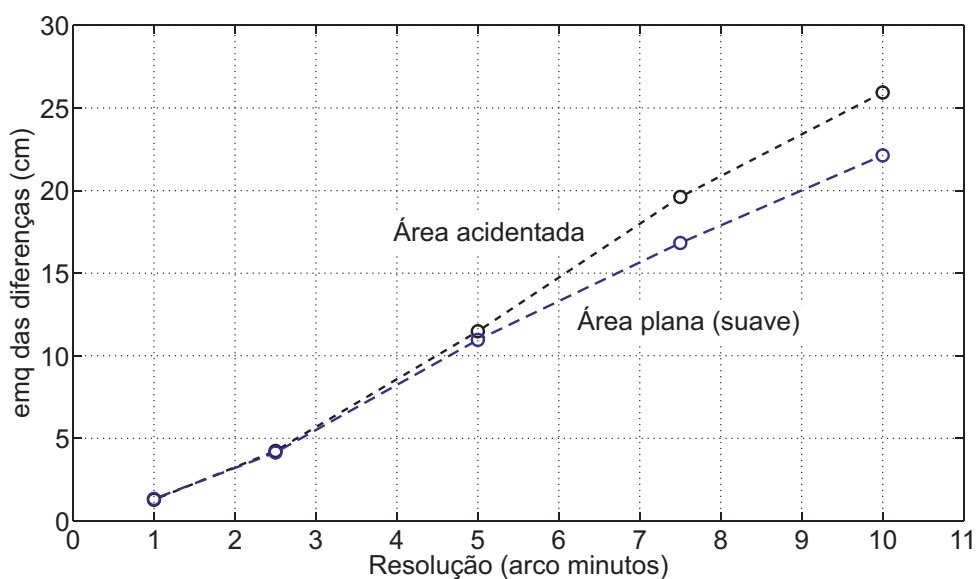


Figura 48 - Erro médio quadrático das diferenças (emq), $\zeta_{\text{verdadeiro}} - \zeta_{\text{estimado}}$

Fonte: O autor

Tabela 2 - Estatísticas das diferenças, $\zeta_{\text{verdadeiro}} - \zeta_{\text{estimado}}$, devido a resolução limitada dos dados de gravidade

Elevação		Resolução				
		1'x1'	2,5'x2,5'	5'x5'	7,5'x7,5'	10'x10'
Acidentado						
402,71	mínimo	0,005	0,016	0,048	0,078	0,084
2707,82	máximo	0,027	0,088	0,229	0,394	0,514
1044,58	média	0,012	0,039	0,109	0,184	0,242
476,70	desvio padrão	0,005	0,015	0,037	0,067	0,095
1148,21	erro médio quadrático	0,013	0,042	0,115	0,196	0,259
Suave						
127,95	mínimo	0,004	0,010	0,031	0,045	0,014
733,50	máximo	0,026	0,082	0,208	0,324	0,419
347,57	média	0,012	0,037	0,101	0,155	0,197
87,98	desvio padrão	0,005	0,018	0,044	0,066	0,101
358,53	erro médio quadrático	0,013	0,041	0,110	0,168	0,221

Fonte: O autor

Nota: Unidades em metros.

5.2.1 Dados de entrada

5.2.1.1 Modelo digital de elevação

Os limites geográficos adotados (latitudes 29°S e 20°S e longitudes 57°W e 46°W) para o MDT são maiores, em 2°, ao limite geográfico das observações gravimétricas cumprindo assim as exigências dos cálculos dos efeitos gravimétricos residuais da topografia (RTM). Para o cálculo deste efeito sobre as anomalias de gravidade (ou distúrbios de gravidade), para o qual é necessário dispor de um MDT num raio de aproximadamente 220

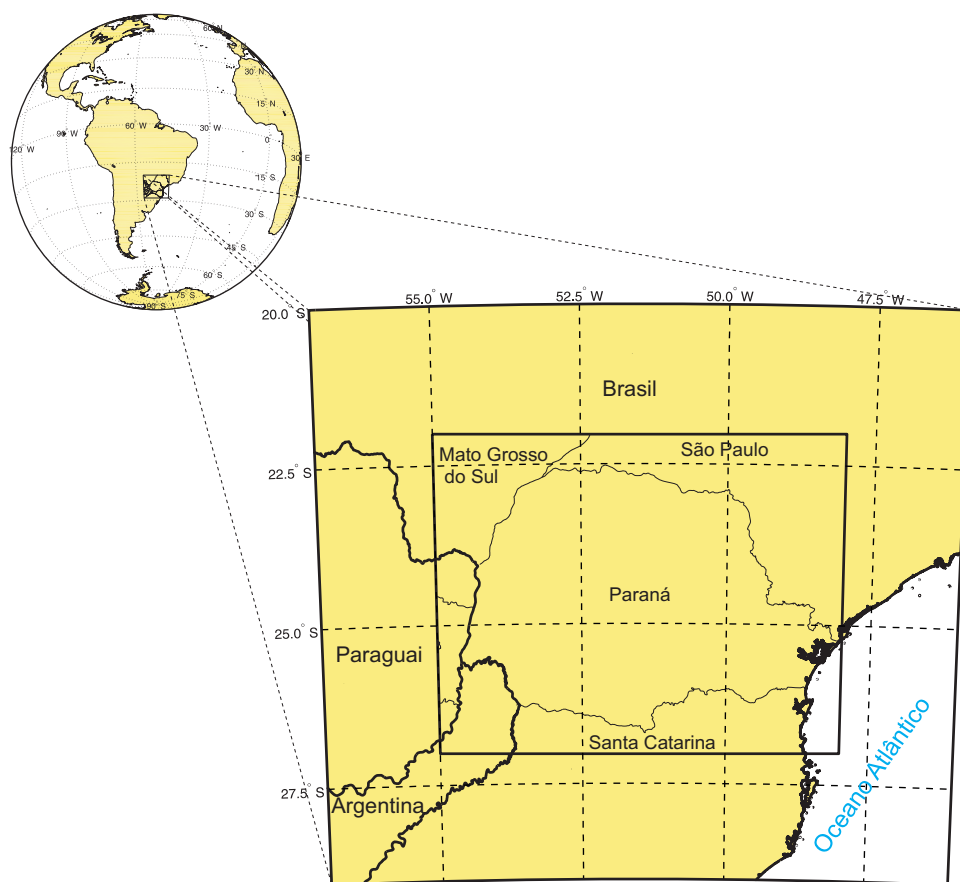


Figura 49 - Localização da área de estudos no Brasil, estado do Paraná

Fonte: O autor

km por razões já discutidas anteriormente.

Na Figura 50 pode-se observar a topografia para a região de estudos. A mesma advém do modelo SRTM-Plus (BECKER et al., 2009) com resolução espacial de 30 arcossegundos (900 metros). Como parte da área de estudos cobre uma porção da região oceânica, a referência a um modelo digital do terreno significa, nesta região, a referência a um modelo digital de profundidades oceânica (batimetria). É importante mencionar que este modelo é referido ao MGG EGM96 e referenciado ao elipsoide de referência WGS84. No entanto, para fins de aplicações deste trabalho, o SRTM foi adaptado ao quase geoide com base no modelo do geopotencial advindo do GOCE (*Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*), a saber do GO_CONS_GCF_2_DIR (*GOCE Gravity Field Recovery by Means of the Direct Numerical Method*), Bruinsma et al. (2010), desenvolvido até o grau e ordem 240 associado ao GRS80.

Os efeitos topográficos foram calculados para a região de estudos com 220 km de raio de integração nas condições mencionadas na subseção 2.3.1 e podem ser visualizados nas Figuras 51 e 52 respectivamente, distúrbios de gravidade RTM (δg_{RTM}) e

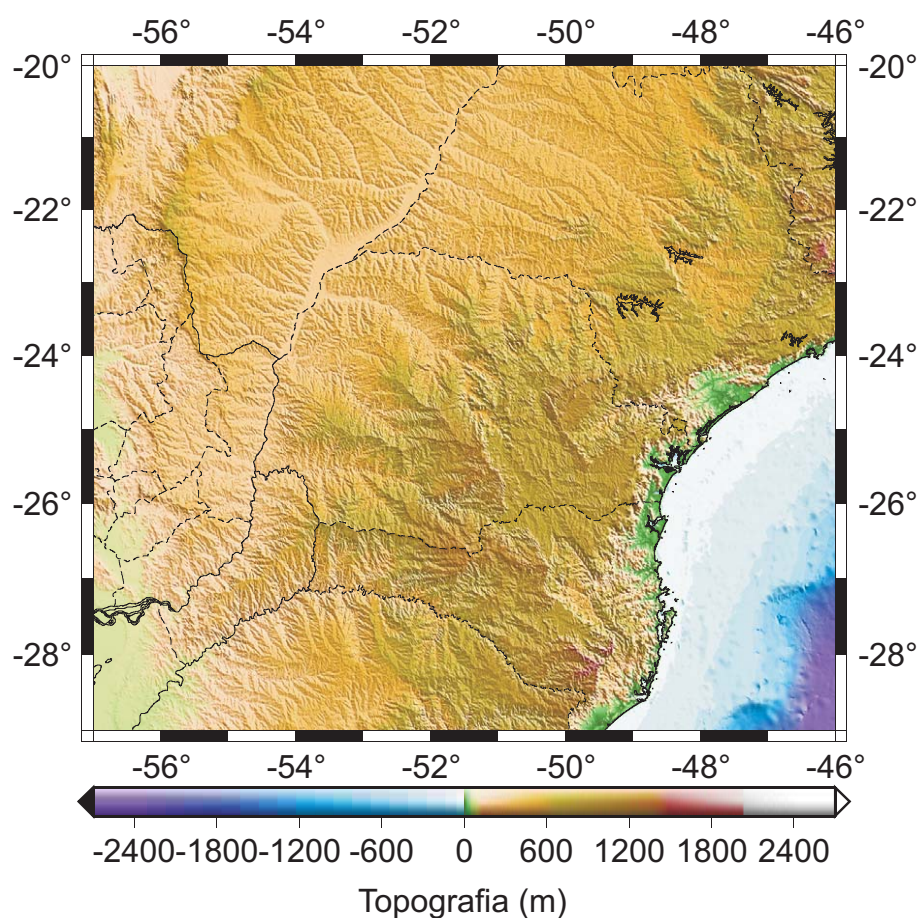


Figura 50 - Topografia para a região de estudos (SRTM)

Fonte: O autor

anomalias de altitude (ζ_{RTM}).

5.2.1.2 Observações gravimétricas: módulo da intensidade de gravidade

Os valores de intensidade de gravidade disponíveis para o Estado do Paraná estão compreendidos entre as longitudes de 55°W e 48°W e latitudes de 27°S e 22°S. Estes dados foram disponibilizados pelo Prof. Denizar Blitzkow e compõem o acervo gravimétrico da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Na Figura 53 pode-se notar no domínio do espaço a distribuição destes valores, que são cerca de 4.913 pontos.

Como visto na subseção (5.1.1.3), para o Estado Federal de Bade-Vurtemberg tem-se cerca de 119.363 pontos com o módulo da intensidade de gravidade observados em uma área de aproximadamente 245.707,24 km², fornecendo uma resolução espacial de aproximadamente 46 arco-segundos. Em contraste, tem-se a situação do Estado do Paraná, com cerca de 4.913 pontos com o módulo da intensidade de gravidade observados em uma área de aproximadamente 393.661,63 km² fornecendo uma resolução espacial de

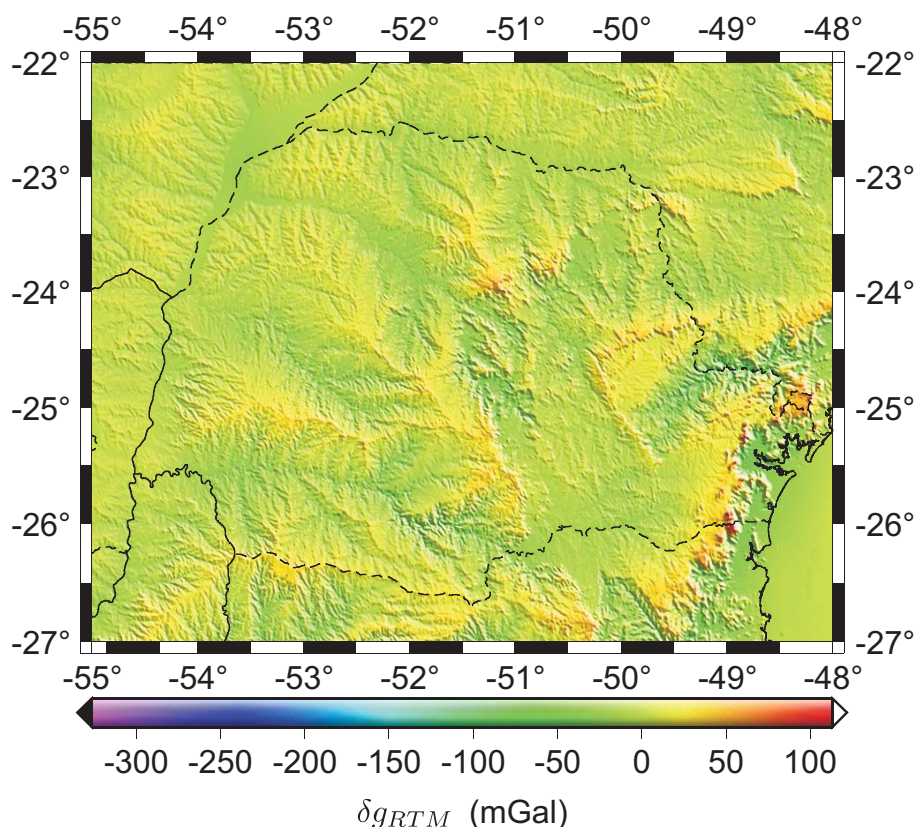


Figura 51 - Efeito gravimétrico para a redução RTM
Fonte: O autor

aproximadamente 5 arco-minutos. A partir da Tabela 2 e Figura 48, pode-se adiantar que o quase geoide para o Paraná apresentará um emq maior que 12 cm devido ao erro de omissão no sinal da gravidade.

Os distúrbios de gravidade foram, em primeiro lugar, reduzidos ao modelo geopotencial GOCE e, depois, calculado o efeito do RTM em cada valor da anomalia. Os efeitos do RTM empregado são os mostrados na Figuras 51 e finalmente, os distúrbios residuais foram calculados. Na Figura 54 pode-se visualizar a função covariância empírica para os distúrbios de gravidade residuais, a mesma foi obtida com base na FFT segundo Esan (2000).

Recordando a regra de Tscherning (TSCHERNING, 1984), com base na qual se obtém o erro de estimação em função dos parâmetros locais da função covariância, e resolvendo esta equação para o caso em análise, verifica-se que para os distúrbios de gravidade residuais obtidos com o modelo GOCE, o erro esperado é 1,62 mGal, para uma malha de 5' de resolução espacial. Considerando-se a frequência de Nyquist, comete-se um erro de 0,81 mGal, que de certo modo, é o erro de comissão. Nota-se de imediato que o problema de determinação do campo de gravidade na região do Estado do Paraná é o erro

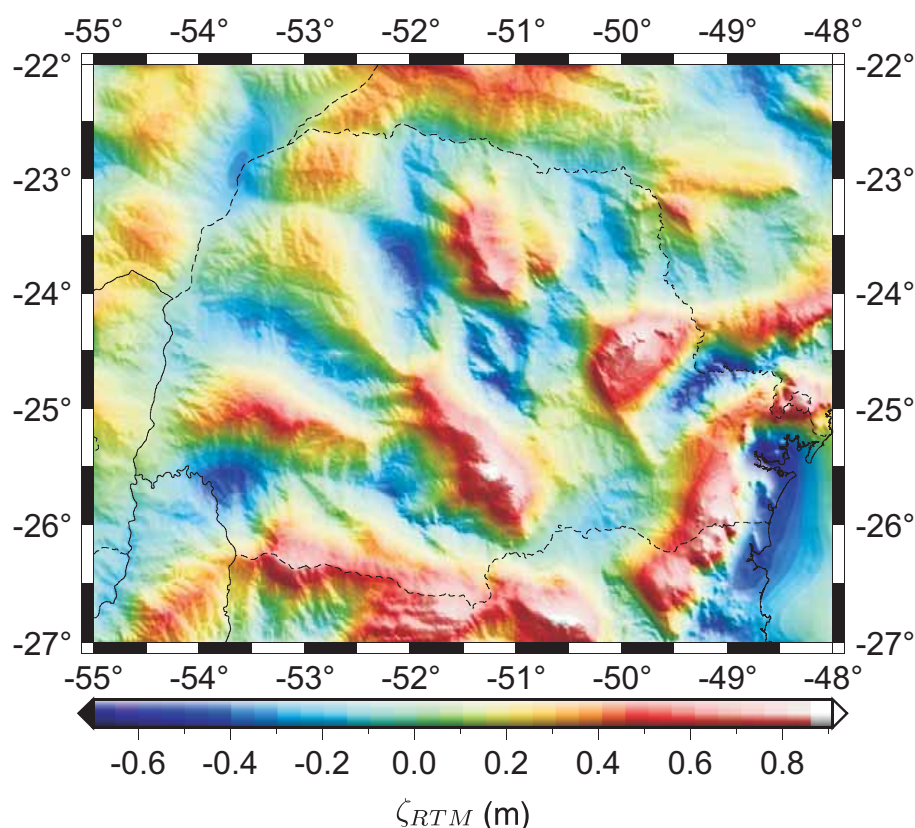


Figura 52 - Efeito indireto sobre o quase geoide ζ_{RTM}

Fonte: O autor

de omissão, ou seja mascaramento, que está relacionado com a perda de informação do sinal gravimétrico quando da baixa resolução de amostragem do mesmo. No entanto, não se pode precisar ao certo a fonte que causa o valor de 784,61 mGal² para a covariância dos distúrbios de gravidade residuais, podendo ser erros nos valores de campo, no modelo do geopotencial, ou ainda no MDT.

Um problema comum que se nota na Figura 53 é a distribuição (esparsa) destes pontos gravimétricos, nota-se que em dadas regiões tem-se muitos pontos e em outras não se tem absolutamente nada. Neste caso específico, empregar modelos do geopotencial de baixa ordem pode ser adequado de acordo com a regra de Rapp (1977). Isso devido ao fato do raio de integração, caso seja um valor muito pequeno, não se tem valores disponíveis em torno do ponto de cálculo. Por um outro lado, se empregado um raio de cálculo como 2°, por exemplo, não se tem informações o suficiente para determinar o campo de gravidade na área. Neste caso, adotou-se o modelo do geopotencial advindo da missão GOCE para os comprimentos de onda até o grau 240 de acordo com Bruinsma et al. (2010), o que fornece um raio de integração, considerando uma calota esférica, de $\psi_0 = 0,423^\circ$.

Se comparado os dois campos de gravidade locais, Bade-Vurtemberg (Alema-

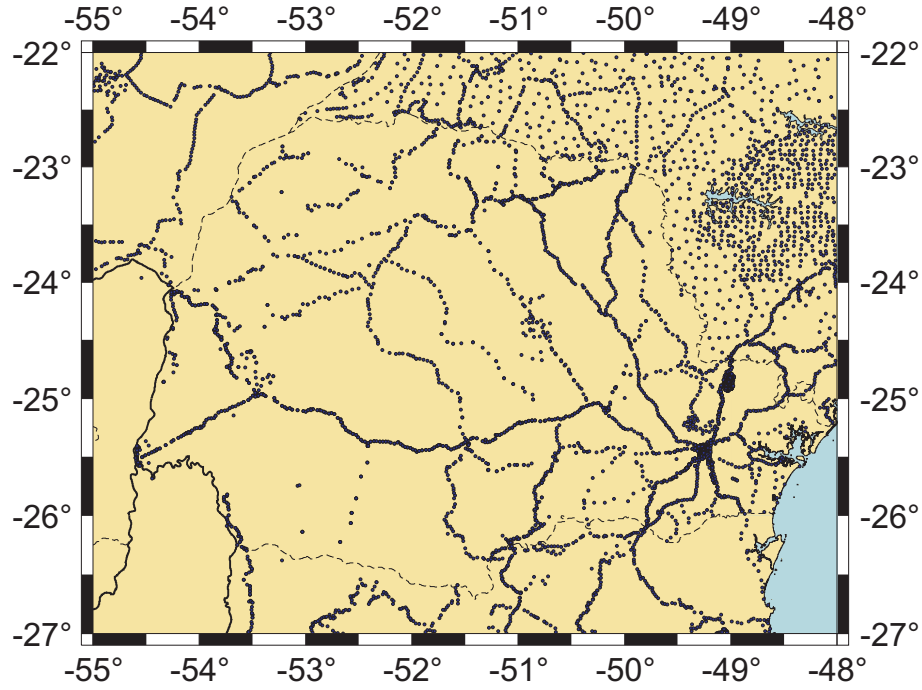


Figura 53 - Valores de intensidade de gravidade para a região do estado do Paraná e adjacências
Fonte: O autor

nha) e Paraná (Brasil), através das características do sinal da função covariância amostral através da $C_0 = 784,61 \text{ mGal}^2$ e a distância de correlação $\phi_1 = 26'$ bem como da distância em que ocorre o primeiro zero, estes sinais são completamente diferentes, ainda que em termos espectrais são apenas resíduos, porém com bandas diferentes. Considerando que o MDT é o mesmo para as duas regiões e descartando-se algum erro no mesmo, pode-se apontar a principal fonte de problemas à modelagem do campo de gravidade no Paraná como sendo os valores locais.

5.2.2 O quase geoide para o Paraná

Considerando a técnica da decomposição espectral, o quase geoide foi calculado da seguinte forma:

$$\mu_0 = \delta g_{res}, \quad (389)$$

$$\mu_1 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h - h_P}{\ell_0^3} \mu_0 d\sigma, \quad (390)$$

e, considerando a recomposição do funcional anomalia de altitude:

$$\zeta = \zeta_{GOCE}^{240} + \zeta_{res} + \zeta_{RTM} + \zeta_1 \quad (391)$$

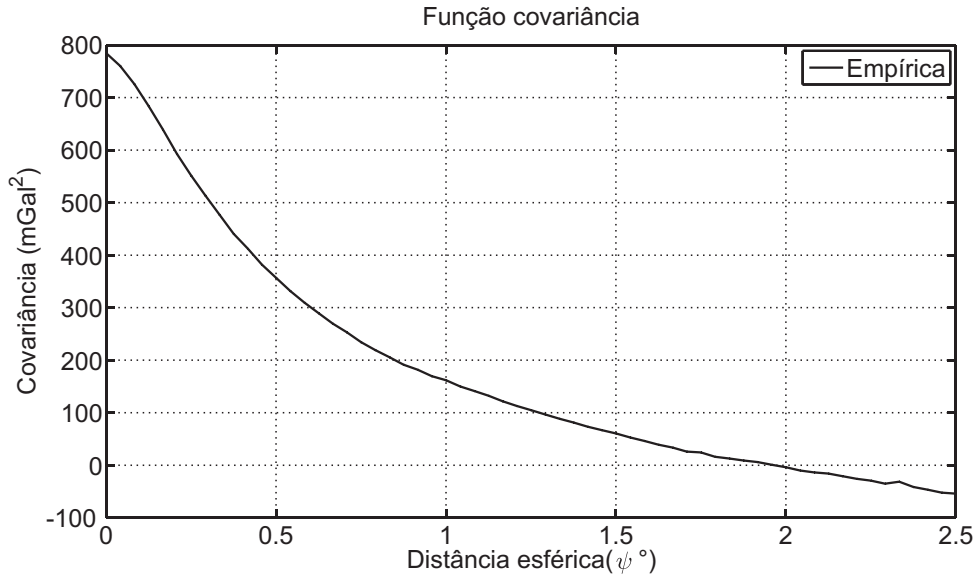


Figura 54 - Função covariância amostral para os distúrbios de gravidade residuais

Fonte: O autor

em que a solução para as anomalias de altitude residuais teve a seguinte avaliação:

$$\zeta_{res} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \mu_0 H_{LB}^{WG}(\psi_k) d\sigma, \quad (392)$$

a modificação empregada, segundo Wong e Gore (1969) tem o seguinte aspecto:

$$H_{LB}^{WG}(\psi_k) = \sum_{n_{máx}+1}^{\frac{\pi}{\Delta}} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos \psi_k), \quad (393)$$

em que $n_{máx}$ é o grau do MGG empregado, neste caso, 240. Δ é a resolução do MDT utilizado que neste trabalho foi de 30 arco-segundos. A relação π/Δ é a frequência de grau de Nyquist para o modelo, neste caso 21.600. O termo de primeira ordem ζ_1 como:

$$\zeta_1 = \frac{R}{4\pi\gamma_Q} \iint_{\sigma} \mu_1 H(\psi) d\sigma. \quad (394)$$

O núcleo truncado minimiza erros de mascaramento e pode ser considerado como um filtro passa banda, função de ponderação para as componentes do campo de gravidade, neste caso, anomalia de altitude. Entretanto, foram vistas na seção 4.4 diversos tipos de modificações e considerando que não se conhece o erro randômico dos valores de gravidade, a modificação de Wong e Gore (1969) aplicada ao núcleo de Hotine é mais indicado e, a mesma, foi aplicada na forma limitada em banda. Quando se conhece o viés e informações acerca dos erros, as outras modificações são mais interessantes do ponto

de vista teórico, principalmente as com base em métodos estocásticos.

Em que o raio de integração para uma calota esférica variou $0^\circ \leq \psi_k \leq 0,423^\circ$. Esta integral foi solucionada no domínio das frequências com a FFT-1D e usando o núcleo de Hotine modificado segundo a modificação de Wong e Gore (1969). O resultado final para o quase geoide do Estado do Paraná pode ser visualizado na Figura 55.

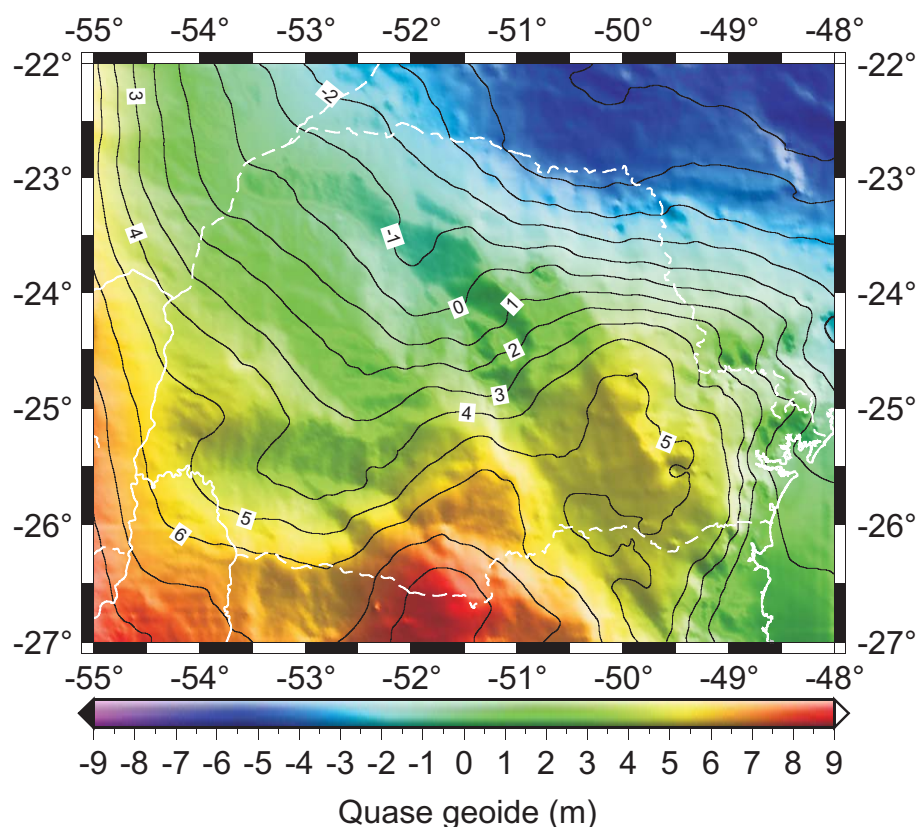


Figura 55 - Quase geoide para a região do estado do Paraná com base no PVCG fixado

Fonte: O autor

Na Figura 56 é mostrada a variância de grau determinada para o modelo do quase geoide global e para o local. Nota-se que a interseção das duas curvas ocorre no grau 200, indicando que em torno deste grau encontra-se a melhor combinação entre os dados terrestres e de análise de órbitas de satélites. A partir deste grau o modelo local contém mais energia que o global, o que de modo geral diz que os dados locais têm mais contribuições.

Avaliação do quase geoide local com base em 89 RNs ocupadas com o GPS, de tal modo que foi possível determinar a componente η (equação 57), aqui denominada como η_{GPS} , recordando que esta componente, por definição e realização é diferente da altura geoidal e da anomalia de altitude, de tal modo que a avaliação do quase geoide será

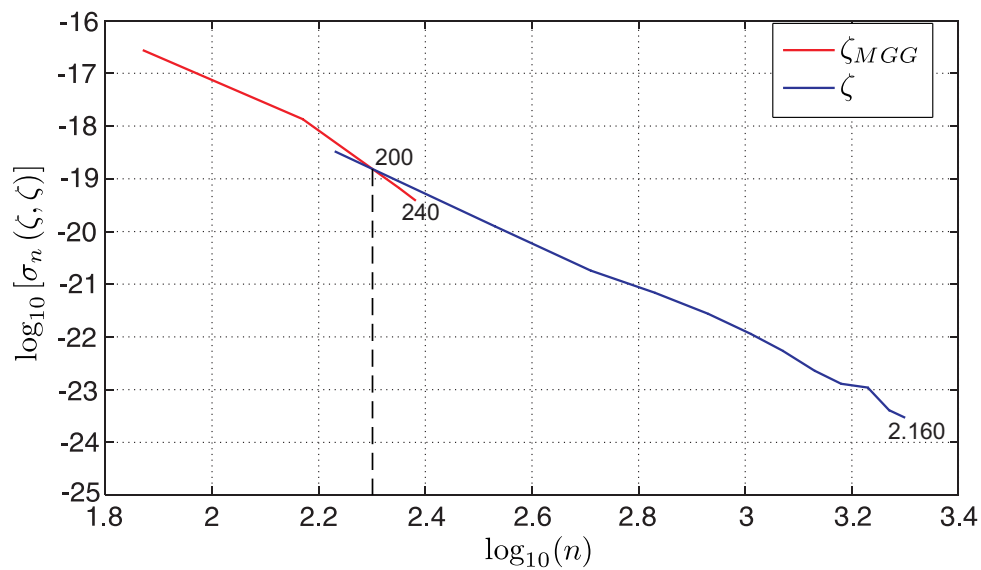


Figura 56 - Potência espectral do MGG advindo do GOCE e do quase geoide local

Fonte: O autor

afetada por uma componente:

$$\zeta - \eta = \frac{\delta U}{\gamma(H^{ON}, \varphi)}. \quad (395)$$

Na Tabela 3 é possível visualizar as principais estatísticas para $\eta_{GPS} - \zeta_{mod}$ em que

$$\eta_{GPS} = h - H^{ON} \quad (396)$$

e ζ_{mod} é a anomalia de altitude advinda do modelo do quase geoide (FIGURA 55). É importante mencionar que o modelo gravimétrico não foi adaptado às RNs como é comum, e que o mesmo encontra-se no mesmo sistema de referência e marés que as componentes GPS (φ, λ, h). Primeiramente, devem ser enfatizado que, os dados de nivelamento usados

Tabela 3 - Avaliação absoluta do quase geoide para o estado do Paraná

Estatística	Valor (m)
mínimo	-0,9929
máximo	0,8464
média	-0,3371
desvio padrão	0,4831

Fonte: O autor

nesta tese não fornecem necessariamente, números geopotenciais normais absolutos porque eles não são vinculados a um potencial normal U_0 . Por tanto, os resultados resumidos na Tabela 3 são influenciados por erros no nivelamento; definição local do nível médio do mar; erros no posicionamento GPS; e inconsistência entre a superfície de referencia para

as altitudes ortométricas-normal e o quase geoide local. No entanto, isso leva a uma aproximada SSTop permanente de -34 m para a região de estudos. Finalmente, coordenadas advindas do posicionamento GPS sobre as RNs são úteis na conexão de um datum vertical local a um SGA, porém não melhora a realização de um SGA.

Pode-se ainda propagar as variâncias das altitudes elipsoidais (σ_h^2) e das altitudes ortométricas-normal ($\sigma_{H^{ON}}^2$) em função da relação (396) obtendo-se:

$$\sigma_{\eta_{GPS}} = \sqrt{\sigma_h^2 + \sigma_{H^{ON}}^2}, \quad (397)$$

em que $\sigma_{\eta_{GPS}}$ é o desvio padrão associado a grandeza η_{GPS} . σ_h é facilmente obtida e é em função da técnica de posicionamento GPS, porém, $\sigma_{H^{ON}}$ não está disponível no momento, é possível estimar esse erro padrão empregando-se a tolerância para os nivelamentos, por exemplo, $\pm 4mm\sqrt{k}$. Na Tabela 4 é possível avaliar os erros padrões de forma resumida para as altitudes elipsoidais e ortométricas-normal bem como para as “alturas geoidais-normal” derivada.

Tabela 4 - Erros padrões aproximados para as altitudes elipsoidais, ortométricas-normal e “alturas geoidais-normal”

Erro padrão aproximado (cm)		
Altitude elipsoidal	Altitude ortométrica-normal	“Altura geoidal-normal”
2, 3 – 9, 1	5, 5 – 11, 3	6, 3 – 13, 9
Fonte: O autor		

No domínio do espaço é possível visualizar as diferenças através dos vetores deslocamentos em que se pode notar um comportamento sistemático para os mesmos (FIGURA 57), o que conduz a conclusão de que, abstraindo-se da componente δU , o quase geoide que define a superfície de referência para as altitudes do SGB encontra-se aproximadamente a -33 cm de uma referência global, com base no PVCG fixado. E existe ainda uma componente relativa ao erro de omissão, como visto na subseção 5.1.3. Neste caso específico, quando do uso dos longos comprimentos de onda na etapa de remoção, os mesmo foram devidamente compatibilizado ao GRS80, bem como os coeficientes foram escalonados, ou seja, as três componentes espectrais estão no mesmo referencial.

É uma prática comum, após o cálculo do quase geoide, e também do geoide, realizar uma compatibilização do mesmo a um dado conjunto de RNs como por exemplo, Fotopoulos (2003) e Kiamehr (2006), entre outros. Este procedimento visa corrigir o comprimento de onda o qual o modelo resolve com informações locais, por exemplo, GPS/RN¹⁹. No intuito de entender de forma mais detalhada o comportamento dos erros

¹⁹ Entende-se por GPS/RN o posicionamento GPS fornecendo (φ, λ, h) sobre as RNs que contém, para o caso Brasileiro, H^{ON} sendo possível então o uso da relação (396).

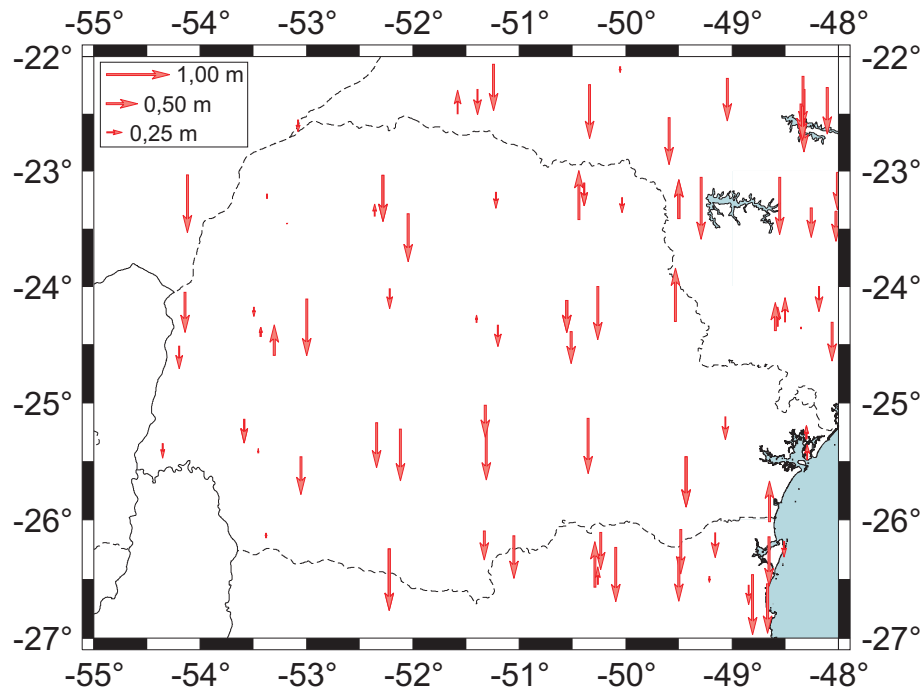


Figura 57 - Avaliação do quase geoide para a região do estado do Paraná com base no PVCG fixado

Fonte: O autor

Nota: O vetores de erros estão em escala conforme os valores mostrados na parte superior esquerda da mesma.

absolutos mostrados na Figura 57, procedeu-se uma análise relativa, da seguinte forma:

$$\delta\Delta H_{AB} = [\Delta\eta_{AB}] - [\Delta\zeta_{AB}]. \quad (398)$$

Que pode ser escrita em partes por milhão (ppm) como:

$$\text{ppm} = \frac{[\delta\Delta H_{AB}]_{\text{mm}}}{[\delta s_{AB}]_{\text{km}}}. \quad (399)$$

No entanto, a escolha dos pares A e B para o cálculo dos desníveis deve respeitar a resolução para a qual o modelo foi proposto. Sabe-se que do ponto de vista relativo, a diferença de altitude elipsoidal e dados de nivelamento geométrico possuem uma alta precisão (2-4 ppm). A avaliação relativa de modelos quase geoidais fornece informações sobre a qualidade destes modelos. No entanto, a diferença entre altitudes normais e ortométricas-normal (*cf.* (197), por exemplo) não foi levada em consideração.

Neste caso, o quase geoide para o Estado do Paraná tem uma resolução equivalente à metade do comprimento de onda do mesmo, a saber, 2,5'. O que significa que se devem escolher todos as possibilidades de pares A e B que estejam separados por uma distância mínima de aproximadamente 4,6 km. Para facilitar esta tarefa, primeiro gera-se uma malha com os erros absolutos mostrados na Figura 57, e aplicando-se o conceito de

derivada direcional de f em P_0 na direção do versor $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ tem-se o valor:

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{u, P_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}, \quad (400)$$

desde que o limite exista.

Escrevendo a definição acima para o problema aqui proposto tem-se A e B pontos para uma área R (FIGURA 57) separados pela distância ds a partir de A e:

$$\Delta f = f(x_B, y_B) - f(x_A, y_A), \quad (401)$$

então

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta s} = \frac{df}{ds}, \quad (402)$$

é a derivada direcional de $f(x, y)$ para A na direção α , que é o azimute de A para B .

Assim, tem-se:

$$\frac{df}{ds} = \frac{df}{dx} \cos \alpha + \frac{df}{dy} \sin \alpha. \quad (403)$$

Pode-se considerar f como sendo o erro absoluto mostrado na Figura 53, porém representado em uma malha.

Na Tabela 5 pode-se visualizar as estatísticas básicas para o erro relativo nas direções $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$. Em uma condição de que as distâncias são iguais ou superi-

Tabela 5 - Avaliação relativa do quase geoide para o estado do Paraná

Estatística	máximo	mínimo	média	desvio padrão
$E - W$ (ppm)	4,6	-3,6	-0,2	1,3
$N - S$ (ppm)	4,7	-5,8	-0,2	1,3

Fonte: O autor

ores a metade do comprimento de onda para o qual o modelo do quase geoide resolve, neste caso aproximadamente 5 km, pode-se concluir que o nivelamento empregando-se o GPS associado com este modelo atende a uma precisão relativa de $\pm 1,3$ ppm. Deve-se ressaltar que todos os conceitos de altitudes físicas estão relacionados com diferenças de potenciais, ao passo que não sejam empregados potenciais absolutos. Neste sentido, um modelo representativo do distúrbio do potencial pode ser empregado em associação com as coordenadas derivadas do posicionamento GPS para a determinação relativa de potencial.

A Figura 58 mostra os erros relativos no domínio do espaço em uma direção de $\alpha = 45^\circ$. No entanto, não se levou em consideração os erros na componente vertical do GPS, que neste caso estão na ordem do centímetro bem como da rede altimétrica, cf. Tabela 4. Mesmo assim, a precisão do método é sem precedentes. Nota-se, que a partir

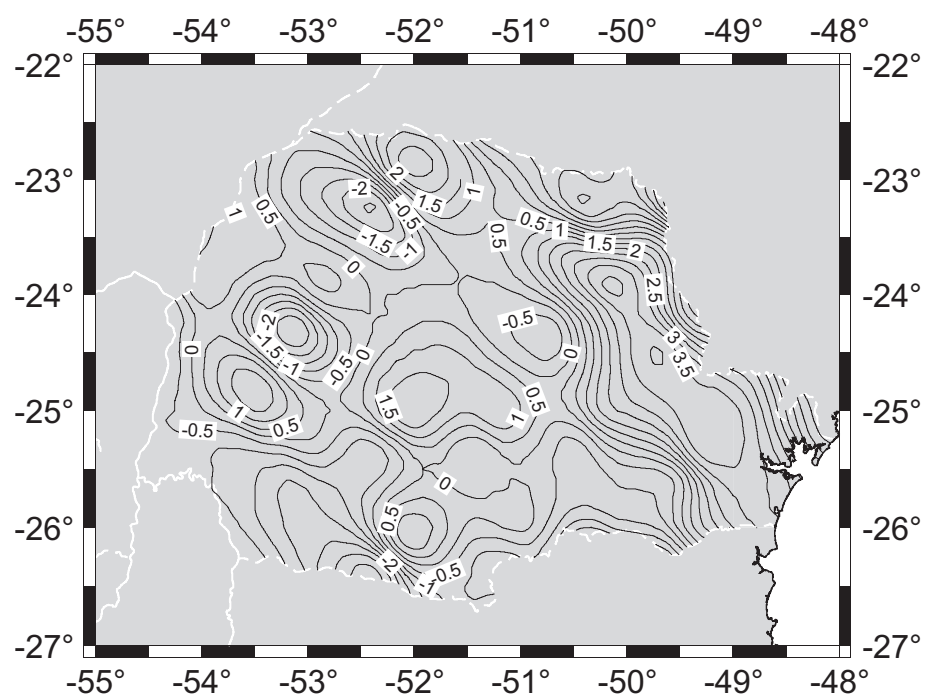


Figura 58 - Avaliação relativa do quase geoide para a região do estado do Paraná empregando-se a derivada direcional com $\alpha = 45^\circ$

Fonte: O autor

Nota: As curvas de isovalores estão em ppm.

desta análise relativa que a precisão dos dados de gravidade, *per si*, não é tão influente (desde que seja aleatório), e que a incerteza no MGG usado na técnica da decomposição espectral não é significativa.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 CONCLUSÃO

A pertinência e atualidade desta tese são amplamente justificadas, quer pela inexistência de qualquer estudo do tópico abordado, quer pela crescente demanda da determinação da superfície de referência para as altitudes com uma precisão consentânea com as técnicas emergentes da tecnologia GNSS. Neste contexto, esta tese teve como objetivo desenvolver uma metodologia com base no segundo problema de valor de contorno da geodésia para a futura modernização do sistema de altitudes do Brasil, sendo a superfície terrestre utilizada como condição de contorno.

Do ponto de vista teórico, a importância deste tópico respalda-se no fato de que não há necessidade de reduções locais, como é o caso dos métodos baseados no terceiro PVCG. Porém, do ponto de vista prático, ele é difícil de ser realizado por conta da ausência de posicionamento GPS associado à gravimetria. Para contornar este particular, foi disponibilizada uma abordagem para transformar as anomalias de gravidade em distúrbios de gravidade. Por outro lado, quando da aquisição de novas observações gravimétricas basta apenas o emprego do gravímetro e GPS, ao passo que no passado, usava-se o gravímetro associado ao nivelamento ou a outras formas expeditas de determinação da componente vertical.

Neste caso, foi possível avaliar de forma prática o segundo PVCG com a solução aqui abordada, a saber, a solução do Tipo Brovar. Esta solução é totalmente compatível com as técnicas de modelagem local do campo de gravidade. Sendo compatível com as atuais técnicas de suavização do campo de gravidade externo quando da solução empregando-se: a técnica remover-restaurar; redução para as massas topo-isostáticas; modelagem residual de terreno (RTM); uso de MGG de alta resolução; integração sobre uma calota esférica modificando-se o núcleo de Hotine.

Sobre os estudos de caso realizados nesta tese, onde se empregou um cenário ótimo, Estado Federal de Bade-Vurtemberg, Alemanha e um cenário que de certo modo reflete a realidade brasileira, o Estado do Paraná. Percebeu-se que um dos problemas que afetam o conhecimento do campo de gravidade no Estado do Paraná, tacitamente, é o efeito de mascaramento (*aliasing*), quando da amostragem do sinal gravimétrico. Muito embora a principal componente, no contexto da técnica remover-restaurar, possa ser afetado por erros de omissão, mas de certo modo esta é uma característica global, e não apenas local como são as observações gravimétricas.

Um sistema de altitudes moderno permite aos usuários das técnicas emergentes da tecnologia GNSS determinar números geopotenciais de forma absoluta bem como de forma local em qualquer ponto do país, sem necessariamente estar conectado fisicamente a uma rede vertical local. A precisão e resolução dos números geopotenciais dependem da precisão e resolução do modelo representativo do distúrbio do potencial. Em uma interpretação no domínio geométrico, a Tabela 3 conduz a conclusão de que os dados de gravidade local não deterioram o datum global do MGG mas influenciam os curtos comprimentos de onda.

Os erros nas observações gravimétricas, desde que aleatórios, não afetam a precisão final do campo modelado como pode ser visto para a precisão relativa do quase geóide para o estado do Paraná, aproximadamente $\pm 1,3$ ppm para distâncias superiores ao comprimento de onda do modelo. Não obstante, convém salientar que não há uma forma em que os efeitos de mascaramento possam ser eliminados a partir de sinais não limitados em banda, como é o sinal de gravidade. Daí efeitos de mascaramento estarão sempre presentes nos cálculos de aproximação do campo de gravidade muito embora se devam buscar técnicas para minimizá-los.

Derivou-se uma nova correção elipsoidal para a integral de Hotine bem como o seu uso para o segundo PVCG no contexto das séries de Brovar. Adicionando estas correções nos valores de contorno o erro decresce de $\mathcal{O}(e^2)$ para $\mathcal{O}(e^4)$. No entanto não se realizou testes e comparações com a formulação apresentada na subseção (4.5.1).

Diante do desafio de transformar as atuais altitudes do SGB, a saber, altitudes ortométricas-normal, em um sistema de altitudes holonômico, ou seja, que possa ser usado no ajustamento dos desníveis apresentou-se a equação de condição (211), que basicamente emprega os atuais desníveis normais-ortométricos associado a uma correção, que faz com que estes possam ser adotados no ajustamento da RVFB.

Determinou-se ainda do ponto de vista teórico, a separação entre a referência para as altitudes ortométricas-normal e as normais (193). Estas duas abordagens fornecem condições necessárias para que se possam converter altitudes ortométricas-normal em altitudes normais. Sendo possível ainda a conversão direta para altitudes ortométricas, porém, esbarra-se no fato de ter que se avaliar o valor da gravidade média ao longo da linha de força.

6.2 RECOMENDAÇÕES

- Recomenda-se solucionar o termo de ordem zero das Séries de Brovar empregando-se a Colocação por Mínimos Quadrados combinada com o núcleo espacial de Hotine,

ou seja, ao invés de $H(\psi)$ usam-se $H(r_P, \psi, r)$.

- Recomenda-se realizar testes práticos do emprego da equação de condição (211) em uma área com valores observados de desníveis geométricos e gravidade, podendo o ajustamento ser realizado em termos de diferença de potencial e desníveis ortométricos-normal devidamente convertidos em desníveis normais.
- Recomenda-se aprofundar o estudo sobre a solução empregando-se a denominada Continuação Analítica no contexto das Séries de Brovar para o segundo PVCG.
- Recomenda-se estudos sobre as modificações do núcleo de Hotine empregando-se técnicas estocásticas ao invés das determinísticas como as empregas nesta tese.
- Recomenda-se o estudo de um método capaz de converter anomalias de gravidade em distúrbio de gravidade, aliás, este ainda é um problema em aberto.
- Recomenda-se o estudo de outras técnicas de condensação das massas topográficas para regiões em que o gradiente da topografia é forte, por exemplo, região em torno do datum vertical brasileiro.

REFERÊNCIAS

- ABD-ELMOTAAL, H. A.; KÜHTREIBER, N. Geoid determination using adapted reference field, seismic Moho depths and variable density contrast. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 77, p. 77–85, 2003.
- ABDALLA, A. **Determination of a gravimetric geoid model of Sudan using the KTH method**. 67 p. Dissertação (Mestrado) — Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, 2009.
- ALBERTELLA, F.; SANSÒ, F. A compendium of physical geodesy. In: **Lectures Notes of the 1st and 2nd International School for the Determination and Use of the Geoid**. Milan 1994 e Rio de Janeiro 1997: International Geoid Service, 1994. p. 1–66.
- ALENCAR, J. C. M. **Sistema nacional de nivelamento de 1ª ordem**. Rio de Janeiro, 1968.
- ALLISTER, N. A.; FEATHERSTONE, W. E. Estimation of Helmert orthometric heights using digital barcode levelling, observed gravity and topographic mass-density data over part of the darling scarp, Western Australia. **Geomatics Research Australasia**, p. 25–52, 2001.
- AMOS, M. J. **Quasigeoid Modelling in New Zealand to unify multiple local vertical datums**. Tese (Doutorado) — Curtin University of Technology, Perth, 2007.
- ARDALAN, A. A.; GRAFAREND, E. W. Ellipsoidal geoidal undulations (ellipsoidal Bruns formula): Case studies. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 75, p. 544–552, 2001.
- ARDALAN, A. A.; GRAFAREND, E. W.; IHDE, J. Molodensky potential telluroid based on a minimum-distance map. Case study: the quasi-geoid of East Germany in the World Geodetic Datum 2000. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 76, p. 127–138, 2002.
- AUZ, A.; OTERO, J. Solución gradiente dle problema de contorno GPS-gravimétrico. In: **3ª Asamblea Hispano-Portuguesa de Geodesia y Geofísica**. Valencia: [s.n.], 2002. p. 190–193.
- BAJRACHARYA, S. **Terrain effects on geoid determination**. 114 p. Dissertação (Mestrado) — University of Calgary, Calgary, 2003.
- BARTHELMES, F. **Definition of functionals of the geopotential and their calculation from spherical harmonic models**. Potsdam, 2009. 32 p. Scientific Technical Report STR09/02.
- BECKER, J. J. et al. Global bathymetry and elevation data at 30 arc seconds resolution: SRTM30-PLUS. **Marine Geodesy**, Taylor & Francis, v. 32, p. 355–371, 2009.
- BESERRA, H. **Ajustamento da rede de nivelamento**. Rio de Janeiro, 1952.

BJERHAMMAR, A. Discrete solutions of the boundary value problem in physical geodesy. **Tellus**, Blackwell Publishing Ltd, v. 27, p. 97–106, 1975.

BJERHAMMAR, A. On a relativistic geodesy. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 59, p. 207–220, 1985.

BJERHAMMAR, A.; SVENSSON, L. On the geodetic boundary value problem for a fixed boundary surface - a satellite approach. **Bulletin Geodesique**, v. 57, p. 382–393, mar. 1983.

BLITZKOW, D. **O problema do valor de contorno da geodésia: resultados práticos para a América do Sul**. 81 p. Tese (Livre Docência) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

BLITZKOW, D. et al. **The progress of the geoid in South America under GRACE and EGM08 models**. 2009. [Http://www.sirgas.org](http://www.sirgas.org) (Acesso em out 28, 2010).

BOMFORD, G. **Satellite Geodesy**. 3rd. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 1971. 742 p.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8. ed. Berlin: LCT, 2006. 450 p.

BRONSHTEIN, I. N. et al. **Handbook of mathematics**. 5. ed. New York: Springer, 2005. 1159 p.

BROVAR, V. On the solutions of Molodensky's boundary value problem. **Bulletin Géodésique (1946 - 1975)**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 72, p. 167–173, 1964.

BROVAR, V. V. A possible improvement in the accuracy of gravimetric results in Geodesy. **Soviet Astronomy JA**, v. 15, p. 1055–1058, jun 1972.

BRUINSMA, S. L. et al. **GOCE Gravity Field Recovery by Means of the Direct Numerical Method**. 2010. Presented at the ESA Living Planet Symposium 2010.

BRUMBERG, V. A.; GROTEN, E. On determination of heights by using terrestrial clocks and GPS signals. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 76, p. 49–54, 2002.

COURANT, R.; HILBERT, D. **Methods of mathematical physics**. New York: Wiley, 1989. 830 p.

ČUNDERLÍK, R.; MIKULA, K.; MOJZEŠ, M. Numerical solution of the linearized fixed gravimetric boundary-value problem. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 82, p. 15–29, 2008.

DALAZOANA, R. **Estudos dirigidos a análise temporal do datum vertical brasileiro**. 188 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2005.

DARAS, I. **Determination of a gravimetric geoid model of Greece using the method of KTH**. 68 p. Dissertação (Mestrado) — Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, 2008.

DENKER, H. Evaluation of SRTM3 and GTOPO30 terrain data in Germany. In: SANSÒ, F.; BASTOS, C. J. L.; FERNANDES, J. (Ed.). **Gravity, Geoid and Space Missions**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2005, (International Association of Geodesy Symposia, v. 129). p. 218–223.

DZIEWONSKI, D. M.; ANDERSON, D. L. Preliminary reference Earth model. **Physics of the Earth and Planetary Interiors**, v. 25, p. 297–356, jun. 1981.

EKMAN, M. Impacts of geodynamic phenomena on systems for height and gravity. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 63, p. 281–296, 1989.

ELLMANN, A. **The geoid for the Baltic countries determined by the least squares modification of Stokes' formula**. 82 p. Tese (Doutorado) — Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, 2004.

ELLMANN, A. Computation of three stochastic modifications of Stokes's formula for regional geoid determination. **Computers & Geosciences**, v. 31, n. 6, p. 742 – 755, 2005a.

ELLMANN, A. A numerical comparison of different ellipsoidal corrections to Stokes' formula. In: SANSÒ, F. (Ed.). **A Window on the Future of Geodesy**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2005b, (International Association of Geodesy Symposia, v. 128). p. 409–414.

ELLMANN, A.; VANÍČEK, P. UNB application of Stokes Helmert's approach to geoid computation. **Journal of Geodynamics**, v. 43, p. 200–213, mar 2007.

ESAN, O. **Spectral analysis of gravity field data and errors in view of sub-decimetre geoid determination in Canada**. 104 p. Dissertação (Mestrado) — University of Calgary, Calgary, 2000.

FAŠKOVÁ, Z.; ČUNDERLÍK, R.; MIKULA, K. Finite element method for solving geodetic boundary value problems. **Journal of Geodesy**, v. 84, p. 135–144, feb 2010.

FEATHERSTONE, W. E. et al. Comparison of remove-compute-restore and university of New Brunswick techniques to geoid determination over Australia, and inclusion of wiener-type filters in reference field contribution. **Journal of Surveying Engineering**, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 130, p. 40–47, 2004.

FEATHERSTONE, W. E.; KIRBY, J. F. The reduction of aliasing in gravity anomalies and geoid heights using digital terrain data. **Geophysical Journal International**, Blackwell Science Ltd, v. 141, p. 204212, 2000.

FEI, Z. **Refinements of geodetic boundary value problem solutions**. 198 p. Tese (Doutorado) — University of Calgary, Calgary, 2000.

FEI, Z. L.; SIDERIS, M. G. A new method for computing the ellipsoidal correction for Stokes's formula. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 74, p. 223–231, 2000.

FERREIRA, V. G. **Análise da componente anômala do geopotencial no datum vertical brasileiro com base no sistema lagunar de Imarui, SC**. 115 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

FILMER, M.; FEATHERSTONE, W.; KUHN, M. The effect of EGM2008-based normal, normal-orthometric and Helmert orthometric height systems on the Australian levelling network. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 84, p. 501–513, 2010.

FLURY, J.; RUMMEL, R. On the geoid-quasigeoid separation in mountain areas. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 83, p. 829–847, 2009.

FORSBERG, R. **A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modeling**. [S.l.], 1984. 129 p. Technical Report n. 355.

FORSBERG, R.; TSCHERNING, C. C. The use of height data in gravity field approximation by collection. **Journal of Geophysical Research**, v. 86, p. 7843–7854, set. 1981.

FORSBERG, R.; TSCHERNING, C. C. Topographic effects in gravity field modelling for BVP. In: SANSÒ, F.; RUMMEL, R. (Ed.). **Geodetic Boundary Value Problems in View of the One Centimeter Geoid**. [S.l.]: Springer Berlin / Heidelberg, 1997, (Lecture Notes in Earth Sciences, v. 65). p. 241–272.

FOTOPOULOS, G. **An analysis on the optimal combination of geoid, orthometric and ellipsoidal height data**. 238 p. Tese (Doutorado) — University of Calgary, Calgary, 2003.

FREITAS, S. de; BLITZKOW, D. Altitudes e geopotencial. In: **Special Issue for South America**. Bulletin International Geoid Service: [s.n.], 1999. p. 47–61.

GELEDEREN, M. V.; RUMMEL, R. The solution of general geodetic boundary value problem by least squares. **Journal of Geodesy**, v. 19, n. 1, p. 1–11, 2001.

GERALD, C. F. **Applied numerical analysis**. [S.l.: s.n.], 1978.

GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of integrals, series, and products**. New York: Academic Press, 1980. 1160 p.

GRAFAREND, E.; HECK, B.; KNICKMEYER, E. The free versus fixed geodetic boundary value problem for different combinations of geodetic observables. **Journal of Geodesy**, v. 59, p. 11–32, 1985.

GRAFAREND, E. W. The definition of the telluroid. **Bulletin Géodésique**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 52, p. 25–37, 1978.

HAAGMANS, R.; MIN, E. de; GELDEREN, M. von. Fast evaluation of convolution integrals on the sphere using 1D FFT, and a comparison with existing methods for Stokes' integral. **Manuscripta Geodaetica**, Springer-Verlag, v. 18, p. 227–241, 1993.

HAGIWARA, Y. Truncation error formulas for the geoidal height and the deflection of the vertical. **Bulletin Géodésique (1946 - 1975)**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 106, p. 453–466, 1972.

HAGIWARA, Y. A new formula for evaluating the truncation error coefficient. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 50, p. 131–135, 1976.

HECK, B. On the non-linear geodetic boundary value problem for a fixed boundary surface. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 63, p. 57–67, 1989.

HECK, B. An evaluation of some systematic error sources affecting terrestrial gravity anomalies. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 64, p. 88–108, 1990.

HECK, B. **On the linearized boundary value problems of physical geodesy**. [S.l.], 1991. Technical Report n. 407.

HECK, B. A revision of Helmert's second method of condensation in geoid and quasigeoid determination. In: MONTAG, H.; REIGBER, C. (Ed.). **Geodesy and Physics of the Earth**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1993, (International Association of Geodesy Symposia, v. 122). p. 246–251.

HECK, B. Formulation and linearization of boundary value problems: From observables to a mathematical model. In: SANSÖ, F.; RUMMEL, R. (Ed.). **Geodetic Boundary Value Problems in View of the One Centimeter Geoid**. [S.l.]: Springer Berlin / Heidelberg, 1997, (Lecture Notes in Earth Sciences, v. 65). p. 119–160.

HECK, B. **Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung**. 3rd. ed. Karlsruhe: Wichman, 2003a.

HECK, B. On Helmert's methods of condensation. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 77, p. 155–170, 2003b.

HECK, B. Problems in the definition of vertical reference frames. In: SPRINGER VERLAG. **V Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy: Matera, Italy, June 17-21, 2003**. [S.l.], 2004. p. 164. ISBN 354021979X.

HECK, B. A Brovar type solution of the fixed geodetic boundary value problem. **Studia Geophysica et Geodaetica**, Springer, v. 18, p. 1–11, 2010. Manuscript submitted.

HECK, B.; GRÜNINGER, W. Modification of Stokes' integral formula by combining two classical approaches. In: **IAG Symposia, XIXth IUGG General Assembly**. [S.l.: s.n.], 1988. p. 1–20.

HECK, B.; SEITZ, K. **Effects of non-linearity in the geodetic boundary value problem**. München, 1993. 74 p.

HECK, B.; SEITZ, K. Solutions of the linearized geodetic boundary value problem for an ellipsoidal boundary to order e^3 . **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 77, p. 182–192, 2003.

HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. **Physical geodesy**. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1967. 364 p.

HELMERT, F. R. **Die Schwerkraft im Hochgebirge, Insbesondere in den Tyroler Alpen**. Berlin: Veröff. Königl. Preuss. Geod. Inst., 1890.

HOBSON, E. W. **The theory of spherical and ellipsoidal harmonics**. New York: Chelsea, 1965. 500 p.

HOFMANN-WELLENHOF, B.; MORITZ, H. **Physical geodesy**. New York: Springer Wien, 2006.

HOTINE, M. **Mathematical Geodesy**. Washington D.C.: U.S. Environmental Science Services Administration, 1969. (ESSA monograph).

HUANG, J.; VÉRONNEAU, M.; PAGIATAKIS, S. On the ellipsoidal correction to the spherical Stokes solution of the gravimetric geoid. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 77, p. 171–181, 2003. ISSN 0949-7714.

HWANG, C.; HSIAO, Y.-S. Orthometric corrections from leveling, gravity, density and elevation data: a case study in Taiwan. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 77, p. 279–291, 2003.

IDHE, J. **Realization of a World Height System (WHS)**. 2009. Draft Pilot Project IAG ICP1.2.

IHDE, J.; SÁNCHEZ, L. A unified global height reference system as a basis for IGGOS. **Journal of Geodynamics**, v. 40, n. 4-5, p. 400 – 413, 2005. ISSN 0264-3707. The Global Geodetic Observing System.

JEKELI, C. **Global accuracy estimates of point and mean undulation differences obtained from gravity disturbances, gravity anomalies and potential coefficients**. [S.l.], 1979. Technical Report, p.41, n. 288.

JEKELI, C. Comparison of undulation difference accuracies using gravity anomalies and gravity disturbances. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 54, p. 137–147, 1980.

JEKELI, C. **Heights, the geopotential, and vertical data**. [S.l.], 2000. Technical Report, p.34, n. 459.

JEKELI, C. Potential theory and static gravity field of the Earth. In: HERRING, T. (Ed.). **Geodesy**. [S.l.]: Elsevier, 2007, (Treatise on Geophysics, v. 3). p. 11–42.

JINHAI, Y.; CHUANDING, Z. The GPS-gravimetry boundary value problem. **Science in China Series D: Earth Sciences**, Science China Press, co-published with Springer, v. 48, p. 398–405, 2005.

KEARSLEY, A. H. W. Tests on the recovery of precise geoid height differences from gravimetry. **Journal of Geophysical Research**, v. 93, jun 1988.

KELLOGG, O. D. **Foundations of Potential Theory**. [S.l.]: Dover Publications, 1929. 384 p.

KIAMEHR, R. **Precise gravimetric geoid model for Iran based on GRACE and SRTM data and the least-squares modification of Stokes' formula with some geodynamic interpretations**. 89 p. Tese (Doutorado) — Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, 2006.

KINGDON, R. et al. Toward an improved orthometric height system for Canada. **Geomatica**, v. 59, p. 241–249, 2005.

KIRBY, J. F. On the combination of gravity anomalies and gravity disturbances for geoid determination in Western Australia. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 77, p. 433–439, 2003.

KLEES, R. Boundary value problems and approximation of integral equations by finite elements. **Manuscripta Geodaetica**, Springer-Verlag, v. 20, p. 345361, 1995.

KOCH, K.; POPE, A. Uniqueness and existence for the geodetic boundary value problem using the known surface of the Earth. **Bulletin Géodésique (1946 - 1975)**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 106, p. 467–476, 1972.

KRARUP, T. **A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy**. [S.l.: s.n.], 1969.

LEHMANN, R. Fast space-domain evaluation of geodetic surface integrals. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 71, p. 533–540, 1997.

LI, Y.; SIDERIS, M.; SCHWARZ, K. A numerical investigation on height anomaly prediction in mountainous areas. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 69, p. 143–156, 1995.

LOBIANCO, M. C. B. **Determinação das alturas do geoide no Brasil**. 165 p. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

LUZ, R. **Estratégias para modernização da componente vertical do sistema geodésico brasileiro e sua integração ao SIRGAS**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

MADER, K. **Die orthometrische Schwerekorrektion des Präzisions-Nivellements in den Höhen Tauern**. Vienna: Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, 1954.

MÄKINEN, J. **A note on the treatment of the permanent tidal effect in the European vertical reference system (EVRS)**. München, 2001. 111-113 p.

MÄKINEN, J.; IHDE, J. The permanent tide in height systems. In: SANSÒ, F.; SIDERIS, M. G. (Ed.). **Observing our Changing Earth**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2008, (International Association of Geodesy Symposia, v. 133). p. 81–87.

MARTINEC, Z.; GRAFAREND, E. W. Solution to the Stokes boundary-value problem on an ellipsoid of revolution. **Studia Geophysica et Geodaetica**, Springer Netherlands, v. 41, p. 103–129, 1997.

MATTOS, A. H. **Ajustamento preliminar de uma rede de nivelamento**. Rio de Janeiro, 1948.

MEISSL, P. **Preparations for the numerical evaluation of second order Molodensky-type formulas**. Columbus, 1971. 72 p.

MEISSL, P. **The use of finite elements in physical geodesy**. [S.l.], apr 1981.

MOJZEŠ, M.; VALKO, M. Physical heights determination using modified second boundary value problem. In: SANSÒ, F.; MERTIKAS, S. P. P. (Ed.). **Gravity, Geoid and Earth Observation**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2010, (International Association of Geodesy Symposia, v. 135). p. 333–338.

MOLODENSKII, M. S.; EREMEEV, V. F.; YURKINA, M. I. **Methods for study of the external gravitational field and figure of the Earth**. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translation, 1962. 248 p.

MORITZ, H. **The boundary value problem of physical geodesy**. [S.l.], 1965. International Association of Geodesy.

MORITZ, H. **On the use of terrain correction in solving Molodensky's problem**. [S.l.], 1968. Scientific Report, p.46.

MORITZ, H. **Nonlinear solutions of the geodetic boundary-value problem**. [S.l.], 1969. Scientific Report, p.63.

MORITZ, H. A new series solution of Molodensky's problem. **Bulletin Géodésique (1946 - 1975)**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 96, p. 183–195, 1970.

MORITZ, H. **Advanced physical geodesy**. Karlsruhe: Herbert Wichmann Verlag, 1980. 500 p.

MORITZ, H. Molodensky's theory and GPS. In: MORITZ, H.; YURKINA, M. I. (Ed.). **In M. S. Molodensky in memoriam**. Graz: [s.n.], 2000. p. 69–85.

NIETHAMMER, T. **Nivellement und Schwere als Mittel zur Berechnung wahrer Meereshöhen**. Berne: Schweizerische Geodätische Kommission, 1932.

NOVÁK, P. **Evaluation of gravity data for the Stokes-Helmert solution to the geodetic boundary-value problem**. 133 p. Tese (Doutorado) — The University of New Brunswick, Fredericton, 2000.

PAUL, M. A method of evaluating the truncation error coefficients for geoidal height. **Bulletin Géodésique (1946 - 1975)**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 110, p. 413–425, 1973.

PAVLIS, N. K.; FACTOR, J. K.; HOLMES, S. A. Terrain-related gravimetric quantities computed for the next EGM. In: **Proceedings of the 1st International Symposium of the International Gravity Field Service**. Harita Dergisi, Istanbul: [s.n.], 2007. v. 18, p. 318–323.

PAVLIS, N. K. et al. **An Earth gravitational model to degree 2,160: EGM2008**. Vienna: [s.n.], 2008. Presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union.

PELLINEN, L. Accounting for topography in the calculation of quasigeoidal heights and plumb-line deflections from gravity anomalies. **Bulletin Géodésique (1946-1975)**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 63, p. 57–65, 1962.

PEREIRA, R. A. D. **Conexão das redes verticais fundamentais do Brasil e da Argentina com base em números geopotenciais**. 158 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

PIZZETTI, P. Geodesia - Sulla es pressione della gravita alla superficie del geoide, supposto ellissoidico. **Atti Reale Accademia dei Lincei**, v. 3, p. 166–172, 1894.

POUTANEN, M.; VERMEER, M.; MÄKINEN, J. The permanent tide in GPS positioning. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 70, p. 499–504, 1996. ISSN 0949-7714.

PRESSAND, W. H. et al. **Numerical recipes in FORTRAN. The art of scientific computing**. 2nd. ed. [S.l.]: Cambridge, 1992.

RAPP, R. The treatment of permanent tidal effects in the analysis of satellite altimeter data for sea surface topography. **Manuscripta Geodaetica**, v. 14, p. 368–372, 1989.

RAPP, R. H. The relationship between mean anomaly block sizes and spherical harmonic representations. **Journal of Geophysical Research**, v. 82, p. 5360–5364, nov. 1977.

RODRIGUEZ, E. et al. **An assessment of the SRTM topographic**. Pasadena, California: [s.n.], 2005. 143 p. Jet Propulsion Laboratory, 2005. Technical Report JPL D-31639.

ROLAND, P. et al. On the combination of global and local data in collocation theory. **Studia Geophysica et Geodaetica**, Springer Netherlands, v. 54, p. 195–218, 2010.

RUMMEL, R.; RAPP, R. H. The influence of the atmosphere on geoid and potential coefficient determinations from gravity data. **Journal of Geophysical Research**, v. 81, p. 5639–5642, nov. 1977.

RUMMEL, R.; TEUNISSEN, P. Height datum definition, height datum connection and the role of the geodetic boundary value problem. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 62, p. 477–498, 1988.

SÁ, N. C. de. **O campo de gravidade, o geóide e a estrutura crustal na América do Sul: novas estratégias de representação**. Tese (Livre Docência) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

SÁNCHEZ, L. Approach for the establishment of a global vertical reference level. In: SANSÒ, F. et al. (Ed.). **VI Hotine-Marussi Symposium on Theoretical and Computational Geodesy**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2008, (International Association of Geodesy Symposia, v. 132). p. 119–125.

SANSÒ, F. Theory of geodetic B.V.P.s. applied to the analysis of altimetric data. In: RUMMEL, R.; SANSÒ, F. (Ed.). **Satellite Altimetry in Geodesy and Oceanography**. [S.l.]: Springer Berlin / Heidelberg, 1993, (Lecture Notes in Earth Sciences, v. 50). p. 318–371.

SANSÒ, F. The long road from measurements to boundary value problems in physical geodesy. **Manuscripta Geodaetica**, Springer-Verlag, v. 20, p. 326–344, 1995.

SANSÒ, F.; VANÍČEK, P. The orthometric height and the holonomy problem. **Journal of Geodesy**, v. 80, n. 5, p. 225–232, 2006.

SANTOS, M. et al. The relation between rigorous and Helmert's definitions of orthometric heights. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 80, p. 691–704, 2006.

SCHWARZ, K. P. Data types and their spectral properties. In: SCHWARZ, K. P. (Ed.). [S.l.]: Beijing International Summer School (BSS), 1984, (Local Gravity Field Approximation). p. 1–66.

SCHWARZ, K. P.; SIDERIS, M. G.; FORSBERG, R. The use of FFT techniques in physical geodesy. **Geophysical Journal International**, v. 100, p. 485–514, mar 1990.

SEEBER, G. **Satellite Geodesy**. 2 revised edition. ed. Berlin: Walter de Gruyter, 2003.

SHAOFENG, B.; DINGBO, C. The finite element method for the geodetic boundary value problem. **Manuscripta Geodaetica**, Springer-Verlag, v. 16, p. 353-359, 1991.

SHEN, W.; NING, J. The application of GPS technique in determining the Earth's potential field. **Journal of Global Positioning Systems**, International Association of Chinese Professionals in Global Positioning Systems (CPGPS), v. 4, p. 268–276, 2005.

SHEN, W. et al. The concept of direct orthometric height determination based on frequency shift equation. In: LI, D.; GONG, J.; WU, H. (Ed.). **International Conference on Earth Observation Data Processing and Analysis**. [S.l.: s.n.], 2008.

SHEN, W. B.; TIAN, W.; HOU, K. **An approach for determining the orthometric height using GPS signals and the preliminary experimental results**. 2009.

[Http://meetingorganizer.copernicus.org/EGU2009/EGU2009-3833.pdf](http://meetingorganizer.copernicus.org/EGU2009/EGU2009-3833.pdf) (Acesso em out 28, 2010).

SHEPPERD, S. A recursive algorithm for evaluating Molodenskii-type truncation error coefficients at altitude. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 56, p. 95–105, 1982.

SIDERIS, M. G. Rigorous gravimetric terrain modelling using Molodensky's operator. **Manuscripta Geodaetica**, Springer-Verlag, v. 15, p. 97–106, 1990.

SIDERIS, M. G.; FORSBERG, R. Review of geoid prediction methods in mountainous regions. In: RAPP, R. H.; SANSÒ, F. (Ed.). **Determination of the Geoid: Present and Future**. [S.l.: s.n.], 1991. p. 51–62.

SJÖBERG, L. A refined conversion from normal height to orthometric height. **Studia Geophysica et Geodaetica**, Springer Netherlands, v. 50, p. 595–606, 2006a.

SJÖBERG, L. A new technique to determine geoid and orthometric heights from satellite positioning and geopotential numbers. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 80, p. 304–312, 2006b.

SJÖBERG, L. A strict formula for geoid-to-quasigeoid separation. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 84, p. 699–702, 2010. ISSN 0949-7714.

SJÖBERG, L. E. Least squares combination of satellite harmonics and integral formulas in physical geodesy. **Gerlands Beitrage zur Geophysik**, v. 89, p. 371–377, 1980.

SJÖBERG, L. E. On the quasigeoid to geoid separation. **Manuscripta Geodaetica**, v. 20, p. 182–192, mar. 1995.

SJÖBERG, L. E. Topographic effects by the Stokes-Helmert method of geoid and quasi-geoid determinations. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 74, p. 255–268, 2000.

SJÖBERG, L. E. A general model for modifying Stokes' formula and its least-squares solution. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 77, p. 459–464, 2003a.

SJÖBERG, L. E. Ellipsoidal corrections to order e^2 of geopotential coefficients and Stokes' formula. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 77, p. 139–147, 2003b.

SJÖBERG, L. E. A discussion on the approximations made in the practical implementation of the remove-compute-restore technique in regional geoid modelling. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 78, p. 645–653, 2005a.

SJÖBERG, L. E. A local least-squares modification of Stokes' formula. **Studia Geophysica et Geodaetica**, Springer Netherlands, v. 49, p. 23–30, 2005b.

SJÖBERG, L. E.; NORD, T. Geoidal undulation computation by modifying Stoke's kernel versus Hotine's kernel from gravity anomalies. **Manuscripta Geodaetica**, v. 17, p. 135–140, mar. 1992.

SOMIGLIANA, C. Geofisica - Sul campo gravitazionale esterno del geoide ellissoidico. **Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei Rendiconti**, v. 6, p. 237–243, 1930.

STOCK, B. A Molodenskii-type solution of the geodetic boundary value problem using the known surface of the Earth. **Manuscripta Geodaetica**, Springer-Verlag, v. 8, p. 273–288, 1983.

STOKES, G. G. On the variation of gravity on the surface of the Earth. In: **Transactions of the Cambridge Philosophical Society**. [S.l.: s.n.], 1849. v. 8, p. 672–695.

TENZER, R. Discussion of mean gravity along the plumbline. **Studia Geophysica et Geodaetica**, Springer Netherlands, v. 48, p. 309–330, 2004.

TENZER, R.; VANÍČEK, P.; SANTOS, M. Corrections to Helmert's orthometric heights. In: **Proceedings of IUGG symposia**. [S.l.: s.n.], 2003.

TENZER, R. et al. The rigorous determination of orthometric heights. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 79, p. 82–92, 2005.

TOCHO, C. N. **Geoide gravimetrico para la República Argentina**. Tese (Doutorado) — Universidad Nacional de La Plata, La Plata, 2006.

TORGE, W. **Geodesy**. 3rd. ed. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2001.

TSCHERNING, C.; RAPP, R. H. **Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations, and deflections of the vertical implied by anomaly degree variance models**. [S.l.], 1974. Scientific Report, p.89.

TSCHERNING, C. C. Local approximation of the gravity potential by least squares collocation. In: SCHWARZ, K. P. (Ed.). **Local Gravity Field Approximation**. [S.l.]: Beijing International Summer School (BSS), 1984, (Local Gravity Field Approximation). p. 277–361.

TSCHERNING, C. C. **Geoid determination after the first satellite gravity missions**. Hannover: [s.n.], 2001. 11-24 p. Festschrift Univ. Prof. em. Dr.-Ing. Wolfgang Torge zum 70. Geburtstag. Wiss. Arb. Fachr. Verm. Univ. Hannover.

TZIAVOS, I.; VERGOS, G.; GRIGORIADIS, V. Investigation of topographic reductions and aliasing effects on gravity and the geoid over Greece based on various digital terrain models. **Surveys in Geophysics**, Springer Netherlands, v. 31, p. 23–67, 2010.

- ULOTU, P. **Geoid model of Tanzania from sparse and varying gravity data density by the KTH method**. 182 p. Tese (Doutorado) — Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, 2009.
- VANÍČEK, P. Letter to the editor. **The Canadian Surveyor**, v. 36, n. 1, p. 122–123, 1982.
- VANÍČEK, P. The height of reason (a letter to the editor). **GPS World**, p. 14, apr 1998.
- VANÍČEK, P.; CHANGYOU, Z.; SJÖBERG, L. E. A comparison of Stokes' and Hotine's approaches to geoid computation. **Manuscripta Geodaetica**, Springer-Verlag, v. 17, p. 29–35, 1992.
- VANÍČEK, P.; FEATHERSTONE, W. E. Performance of three types of Stokes's kernel in the combined solution for the geoid. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 72, p. 684–697, 1998. ISSN 0949-7714.
- VANÍČEK, P.; KLEUSBERG, A. The Canadian geoid - Stokesian approach. **Manuscripta Geodaetica**, Springer-Verlag, v. 12, p. 86–98, 1987.
- VANÍČEK, P.; KRAKIWSKY, E. J. **Geodesy - The concepts**. [S.l.]: Elsevier Science, 1986. 697 p.
- VANÍČEK, P.; MARTINEC, Z. The Stokes-Helmet scheme for the evaluation of precise geoids. **Manuscripta Geodaetica**, Springer-Verlag, v. 19, p. 119–128, 1994.
- VANÍČEK, P. et al. Algunos aspectos sobre alturas ortométricas y normales. **Revista Cartográfica**, p. 79–86, 2003.
- VASSILIOU, A. The computation of aliasing effects in local gravity field approximation. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 62, p. 41–58, 1988.
- WANG, Y. M.; RAPP, R. H. Terrain effects on geoid undulation computations. **Manuscripta Geodaetica**, Springer-Verlag, v. 15, p. :23–29, 1990.
- WICHENCHAROEN, C. **The indirect effects on the computation of geoid undulations**. Columbus, 1982. 96 p.
- WITTE, L. de. Truncation errors in the Stokes and Vening Meinesz formulae for different order spherical harmonic gravity terms. **Geophysical Journal International**, Astr. SOC, v. 12, p. 81–91, 1967.
- WOLF, H. Über die einföhrung von normalhöhen. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Deutscher Verein für Vermessungswesen (DVW) e.V., p. 1–5, jan 1974.
- WONG, L.; GORE, R. Accuracy of geoid heights from modified Stokes kernels. **Geophysical Journal International**, Astr. SOC, v. 18, p. 81–91, 1969.
- ZHANG, K. **An evaluation of FFT geoid determination techniques and their application to height determination using GPS in Australia**. 261 p. Tese (Doutorado) — Curtin University of Technology, Perth, 1997.
- ZHANG, K.; BIAN, S.; SHEN, W. The singular integration of physical geodesy in the frequency domain. **Manuscripta Geodaetica**, Springer-Verlag, v. 20, p. 241–247, 1995.

ZHANG, L. et al. Height datum unification between Shenzhen and Hong Kong using the solution of the linearized fixed-gravimetric boundary value problem. **Journal of Geodesy**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 83, p. 411–417, 2009.